

教職課程：数学科指導法テキスト

●このテキストの対象者：

このテキストは学部3年の教職課程「数学科指導法（主に中学・高等学校）」に使用するものである。
通年30回の授業の中の22回分を掲載した。

対象としては数学科や情報科学科などの学部生が、専門の数学を学んだうえで「学校数学（School Mathematics）」という視点で捉えなおした。

●テキスト作成の基本的な考え方

実際の授業場면을想定した内容ではなく、授業者が自分の数学的背景を踏まえた上で授業展開可能になるようなテーマを設定する予定。その上で、授業力を向上させる意味での次のような視点をおく。

○内容として

- ・一貫性と関連性を意識した授業展開
- ・数学の歴史を意識した授業展開

○方法として

- ・疑問から生まれる授業展開
- ・ICTの活用を前提とした授業展開（デジタル教科書、デジタル教材、ゲームなど）
- ・数学実験を取り入れた授業展開
- ・数学教育の歴史
- ・ICTを用いた数学（Mathematica, Geogebra, Excel）
- ・模擬採点実習
- ・マイクロティーチング

【数学的精神の復興】（中世から近世へ）

14 世紀～16 世紀 ルネッサンス（イタリア中心）

中世ヨーロッパ・

自由七科

基礎三科：論理、文法、修辞、

応用四科：天文、音楽、幾何、算術

【近代科学へ】

16 世紀～17 世紀初頭

コペルニクス、ガリレオ、ケプラー

17 世紀中葉 デカルト、パスカル、フェルマー

17 世紀後期 ニュートン、ライプニッツ、ベルヌーイ

イ

18 世紀 オイラー、ラプラス、ガウス

19 世紀～現代



2 数学の基礎を固める

線型代数・・・ベクトル、行列

解析・・・比例・反比例、関数、微分、積分

代数・・・数論、方程式論

幾何・・・ユークリッド幾何、非ユークリッド幾何（楕円型、双曲型）

基礎論・・・集合と論理、ブール代数

確率・統計・・・記述統計、数理統計（推定、検定）

物理学

数学史

3 教科横断型の教材作成の視点をもつ

国語・・・集合と論理

社会・・・確率・統計（データの分析など）、数学史

理科・・・比例式、行列、確率、幾何、微分積分

（化学の反応式、力学、電磁気など）

情報・・・整数論、集合と論理、離散数学

4 教授法の改革をめざす

一斉授業 → 協働学習、グループ活動の活用

黒板とチョーク → ICT の活用（デジタル教科書、デジタル教材、電子黒板、ゲーム）

5 わが国も含めた諸外国の数学の教科書を研究する

・ 黒表紙 緑表紙

・ オーストラリアの教科書、イギリスの教科書など

【課題】

Q1：あなたにとって「数学」とは

Q2：「数学教育」の目標は何だと思いますか？（数学で生徒はどのような力が育つのでしょうか？）

【参考図書】

- ・ E.T.ベル：数学をつくった人々(1)～(3)、ハヤカワ文庫 NF,早川書房.
- ・ ヴァン・デル・ワールデン：数学の黎明,みすず書房.
- ・ M.クライン：数学の文化史,河出書房新社
- ・ 遠山啓：無限と連続、岩波文庫、岩波書店
- ・ 吉田洋一：零の発見、岩波文庫、岩波書店
- ・ 森毅：「数学の歴史」、紀伊国屋書店
- ・ 森毅：「微積分の意味」、日本評論社
- ・ 高木貞治：解析概論、岩波書店

その他、線型代数、解析の標準的な本を一冊、手元においておくといいと思います。自分が学部時代に使用したものでも結構です。

この授業の間は「高校生に教える」という視点で考えてみましょう。

問2：ある所に一本の木がある。最初の1年に高さが1 mとなり，次の年には50 cm伸び，その次の年には25 cm伸び，毎年その前年に伸びる半分だけ伸びるとする。この木はどこまで伸びるだろうか。
(国定教科書緑表紙 小学校6年下巻)

I 数の体系

自然数 $\mathbf{N}$, 整数 $\mathbf{Z}$, 有理数 $\mathbf{Q}$, 実数 $\mathbf{R}$, 複素数 $\mathbf{C}$ とすると,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Q：小数とは

Q: 実数とは

- ・コーシー (1789-1857) 列での構成: $\lim_{n,m \rightarrow \infty} |x_n - x_m|$
- ・デデキント (1831-1916) の切断...有理数の切断で実数を定義
- ・無限小数としての実数 (超準解析 nonstandard analysis)
- ・実数の代数的側面 (順序構造, アルキメデスの原理)
- ・実数の幾何学的側面 (数直線 $\mathbb{R}$)

II 無限とは？ 連続とは？

1 ピュタゴラス哲学の危機

ピュタゴラスの数の哲学 (BC580-500) は「万物は数である」というもので、万物は点の集まりすなわち数の集まりという素朴な考え方だったようである。ユークリッドまでになると「点とは部分をもたないもの」と精密な議論になるのだが、この頃はまだ大きさをもつ微小なものという考えだったのだろう。すると必然的に線分は有限個の点の集まりからなり、線分はあたかも数珠の連なりと考えられたようだ。そうすると、数はすべて自然数の比で表現され「通約可能」な、いまでいう有理数のみということになる。また、一方でピュタゴラスの定理 (三平方の定理) の発見により、ピュタゴラス達の数学哲学は致命的な傷を負うことになる。

2 追い討ちをかけたツェノンのパラドックス

エレア派のツェノン（BC490-430）が提出したパラドックスで有名なもの4つあるがそのうちの3つを下記に述べるがこれらのパラドックスは完全にピュタゴラス一派の野望を打ち砕くものであった。

- ・運動は存在しない
- ・アキレスはカメを追い抜けない
- ・飛んでいる矢は止まっている



問3：なぜ、アキレスはカメを追い越せないのだろうか？

ゼノンはこのパラドックスで何を言いたかったのだろうか？

そして、この問題を解決するにはニュートン (1643-1727) やライプニッツ (1646-1716) らによる 17 世紀以降に発展した微分積分学、とくにその中の級数 (無限級数) や極限の概念を待たなければならなかった。そして、ようやく数学においても無限を扱えるようになった。

Q：この世の中の本質は離散 (デジタル) or 連続 (アナログ) ？

Q：実在論 vs 認識論

3 カントールの集合論

集合論の創始者ゲオルグ・カントール (1845-1918) は果敢にも「無限の数学」に立ち向かった。そしてカントールが行ったことは「無限を数える」ことで、無限の中にもさまざまな無限があることが判明した。

- ・可算集合 a (自然数, 整数, 有理数など)
- ・非可算集合 C (実数 R : 対角線論法)
- ・連続体仮説 (a と C の中間濃度をもつ無限集合の存在?)

問4：複素数とは？

III 2 次方程式の解の求め方から虚数の歴史は起こった (式のよさ)。

9 世紀アラビアの数学者アル・クワリズミは「アルジェブラとアルムカバラ」という代数学の本のなかで、次の 6 種類の方程式を研究した。

- | | |
|-------------------------|----------------|
| (1) 根の平方が根の何倍かに等しい | $x^2 = ax$ |
| (2) 根の平方がある数に等しい | $x^2 = a$ |
| (3) 根がある数に等しい | $x = a$ |
| (4) 根の平方とその倍数の和がある数に等しい | $x^2 + bx = a$ |
| (5) 根の平方とある数の和がその根に等しい | $x^2 + a = bx$ |
| (6) 根とある数との和がその根の平方に等しい | $x^2 = bx + a$ |

※ 根と根の倍数 bx は区別しない。

アル・クワリズミは式を知らなかったのので、例えば (4) の問題 ($b=10$, $a=39$) を次のように文章で解いている。 ($x^2 + 10x = 39$)

「その根の平方とその根の 10 倍との和が 39 となる根を求めよ」は、「根の平方に加えるべきその根の個数を半分にする。今この問題では根の個数は 10 であるので、その数は 5 となる。その数にその数自身をかける。すると 25 になる。これに 39 を加えると合計は 64 になる。その平方根を計算すると 8 となる。それから根の数の半分の 5 を引き、残りは 3 となる。これが求める数である」

これを式で表すと、

$$x^2 + 10x = 39$$

$$x^2 + 10x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 39 + \left(\frac{10}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

$$(x+5)^2 = 64$$

$$x+5=8$$

$$x=3$$

式で書けばどれほど簡潔になるかは一目瞭然である．この方程式は次の問題に置き換えることができる．

問題：5 メートル平方の正方形の土地がある．いまその土地を広げて 39 平方メートルだけ広い正方形の土地にしたい．どれだけ広げればいだろうか．

これを一般化すると，有名な 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) の解の公式が生まれる．

【代数方程式がもたらす数】(自然数からの拡張)

$$x-5=0 \quad \text{自然数}$$

$$x+5=0 \quad \text{負の数 (整数)}$$

$$2x-5=0 \quad \text{分数 (有理数)}$$

$$x^2-2=0 \quad \text{無理数 (実数)}$$

$$x^2+1=0 \quad \text{虚数 (複素数)}$$

【代数的数と超越数】

代数的数 (algebraic number) とは，ある有理数係数の多項式の根となる複素数のこと．すなわち，複素数 α が，

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{Q})$$

に対して， $f(\alpha) = 0$ となるとき α を代数的数という．

これに対して，代数的数でない複素数のことを超越数 (transcendental number) といい，現在は円周率 π (リンデマンが証明) と自然対数の底 e (エルミートが証明) しか見つかっていない．($\pi+e$ は不明)

IV 虚数の歴史

9 世紀 (アラビア) 2 次方程式の解法 (アル・クワリズミ)

16 世紀 (イタリア) 3 次方程式，4 次方程式の解法 (カルダノ，タータグリア)

18 世紀 オイラー (1707-1783) $\sqrt{-1} = i$ と表記

18 世紀 ガウス (1777-1855) 代数学の基本定理

$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 = 0$ ($a_i \in \mathbb{C}$) は必ず複素数の解をもつ.

19 世紀 5 次方程式に関する研究：アーベル (1802-1829), ガロア (1811-1832)

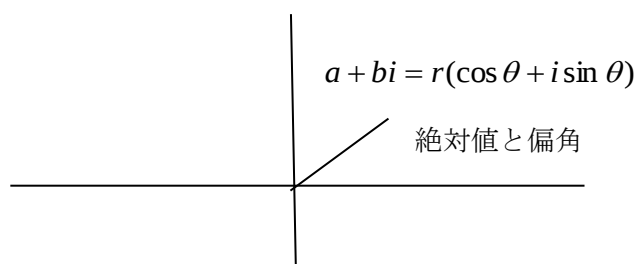
【複素数の扱い】

不可能な数 $\rightarrow \sqrt{-1}$ の表記 $\rightarrow$ 想像上の数 $\rightarrow$ 意味づけされた数

V 複素数の幾何学的な側面 (複素数平面)

$$\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ (+1) \times (-1) = -1 & & (-1) \times (-1) = +1 \end{array} \quad \text{実数 (数直線)}$$

このことより, -1 : 180 度回転 $\rightarrow i$ は 90 度回転 とみなすことができる.



※行列との関係

回転行列 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ より $\theta=90^\circ$ のとき $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ から $I^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

【正 n 角形と $z^n - 1 = 0$ 】

例 1 : $z^3 - 1 = 0$ を解きなさい.

解 : $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$

問題 : $z^4 = 1, z^5 = 1$ を解きなさい.

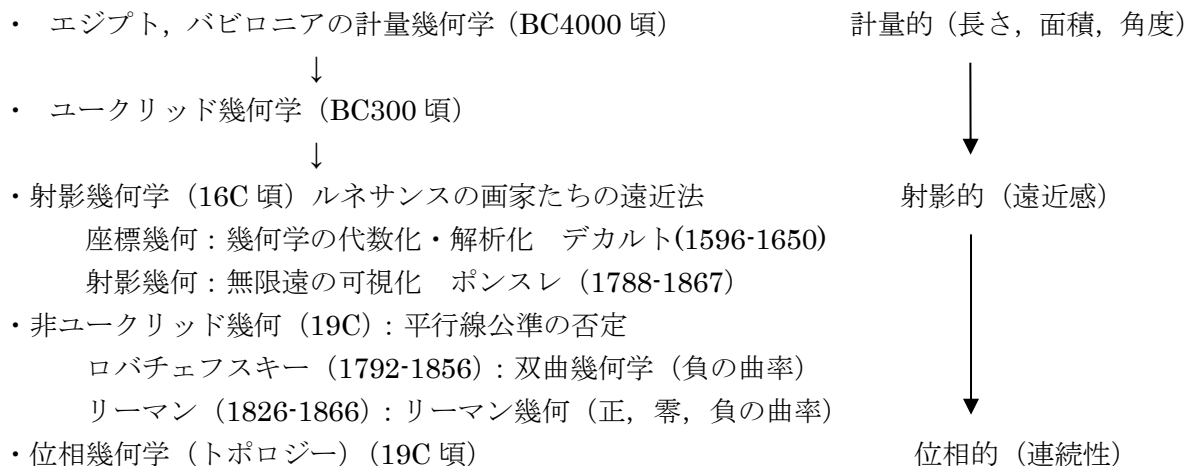
【参考図書】

- 遠山啓：数学入門 (上), 岩波新書, 岩波書店, 1959.
- 遠山啓：無限と連続, 岩波新書, 岩波書店, 1952.
- 吉田洋一：零の発見, 岩波新書, 岩波書店, 1939.
- M. ラインズ：数—その意外な表情, 岩波書店, 1988.
- 小島順：微分積分入門 (上), 日本評論社, 1996.
- J. メイザー：ゼノンのパラドックス, 白揚社, 2007.

第3回 図形の指導について（幾何学の歴史をひもとく）

I 幾何学の歴史（3次元生物である人間の空間・時間認識の歴史）

児童心理学者のピアジェ（J.Piaget）は「幼児の空間的表象」のなかで、「こどもの認識発展の順序は、数の場合の学問の発展順序（歴史的順序）とほぼ一致するが、図形の場合はその逆のようだ」と述べている。



※幼児の図形認識順序

位相的 → 射影的 → 計量的

II 図形指導の流れ（カリキュラムを見通す）

小学校



中学校



高等学校



大学初年級



Ⅲ 幾何学の話題（平面幾何の場合）・・・従来の学校数学ではあまり扱われない話題を取りあげる。
幾何学は分類の学問でもある（同値類）。

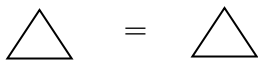
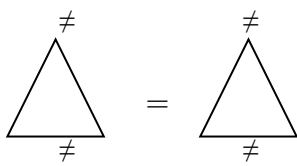
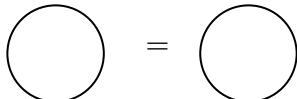
【クイズ】次の 11 個のアルファベットを 2 つのグループに分けて下さい。

A B C D E G I O S U W

[合同]

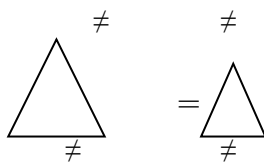
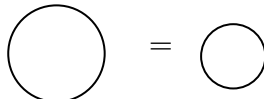
平行移動

回転 鏡映



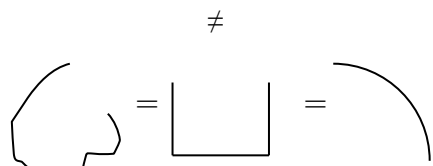
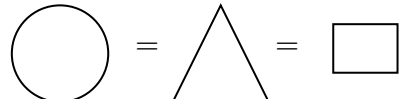
[相似]

拡大 縮小



[トポロジ的]

のばす ひっばる



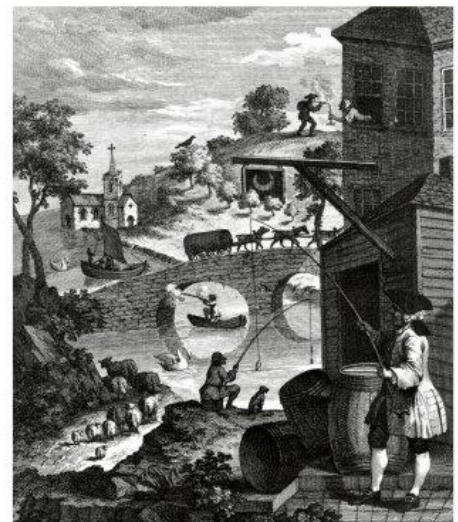
1：射影幾何学の話題（遠近感の幾何学）・・・幾何学に無限遠をどのように取り入れるのか。

問：次元とは...人間は2次元がなぜ好きか？

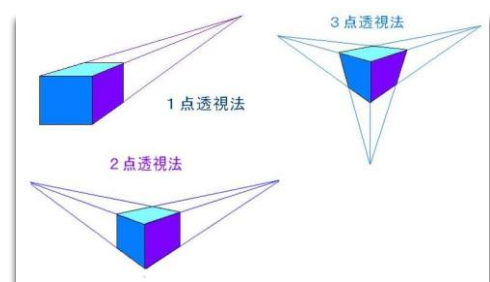


「最後の晩餐」レオナルド・ダ・ビンチ（1456-1519）
（一点透視法）

「偽の遠近法」ウィリアム・ホガース
（1697-1764）



こどもの絵画
（遠近感が希薄）



○射影幾何に座標を導入すると（射影平面を定義する）...無限を取り入れる。

定義：射影平面（2次元） P^2 とは、
3つの実数の比の集合として、

$P^2 := \{(x : y : z) \mid \text{ただし } (x : y : z) \neq (0 : 0 : 0), (x, y, z) \in R^3\}$
を考える。ここで、

$$E_{xy} := \{(x : y : z) \in P^2 \mid z \neq 0\}$$

と定義する。すると次のようにして、 E_{xy} と R^2 は1対1対応がつく。

$R^2 \rightarrow E_{xy}$ は

$$(X, Y) \rightarrow (X : Y : 1)$$

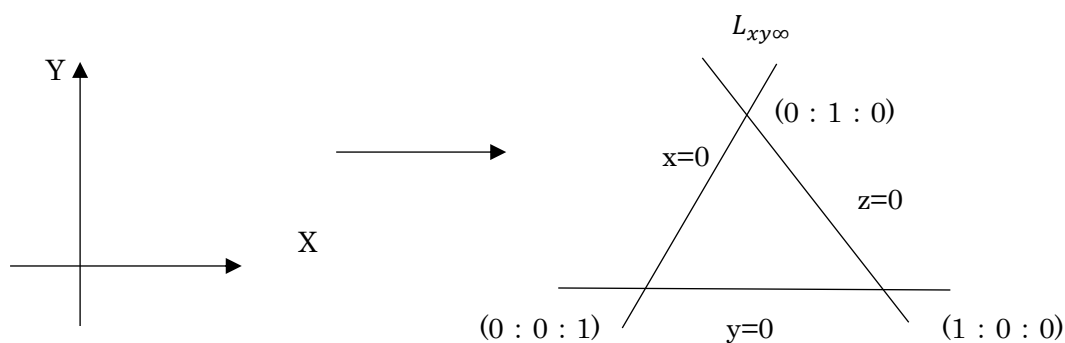
$E_{xy} \rightarrow R^2$ は

$$(x : y : z) \rightarrow \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = (X, Y)$$

となり、

$$L_{xy\infty} := P^2 - E_{xy}$$

が無限遠直線と考えることができる。



XY 平面人間

$$(X, Y) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

射影平面（比を同値とする平面）

$$(x : y : z)$$

例題：XY 平面人間における次の曲線は XZ 平面人間にはどのようなになるか。

$$Y = X^2$$

解：

練習

$$(1) Y = X^2 + 1$$

$$(2) XY = 1$$

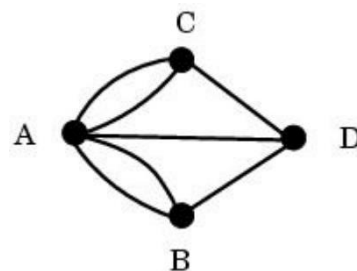
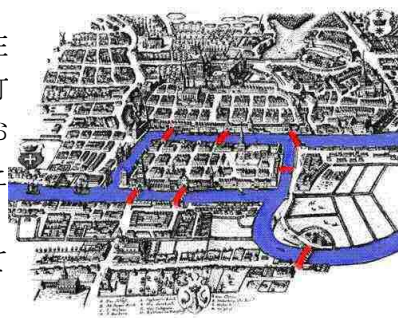
2：位相幾何学的な話題（やわらかい幾何学）

【一筆書きの問題】・・・トポロジーの曙

18 世紀の初めごろにプロイセン王国にあるケーニヒスベルク（現在はバルト海に面したロシアの都市カリーニングラード）という大きな町があった。この町の中央には、プレーゲル川という大きな川が流れており、七つの橋が架けられていた。あるとき町の人々が、次のように言ったという。

「このプレーゲル川に架かっている 7 つの橋を 2 度通らずに、すべて渡って、元の所に帰ってくることができるだろうか？」

すると、1736 年にレオンハルト・オイラー（1707－1783）という数学者は、この問題を右のグラフに置き換えて考えた。このグラフが一筆書き可能であれば、ケーニヒスベルクの橋をすべて 1 度ずつ通って戻ってくるルートが存在することになる。そして、オイラーは、このグラフが一筆書きできないことを証明し、ケーニヒスベルクの問題を否定的に解決したという。



【位相不変量】

位相幾何学（トポロジー）は質的な分類だが、オイラーは次のようなオイラー標数（Euler characteristic）という不変量を考えた。

K を多面体としたとき、 V ：頂点数、 E ：辺の数、 F ：面の数とすると、オイラー標数を

$$\chi(K) = V - E + F$$

と定義する。この標数はオイラーが多面体の研究のために位相不変量として用いたといわれる。

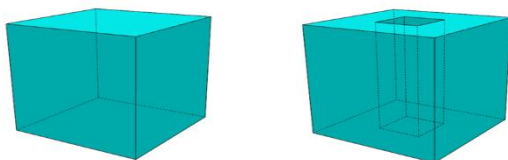
【1 次元】



$$\chi(K) =$$

$$\chi(K) =$$

【2 次元】



$$\chi(K) =$$

$$\chi(K) =$$

もう少し一般的にいうと，連結な向き付け可能閉曲面の種数（穴の数） g を考える．するとその種数とオイラー標数 χ の関係は，閉曲面では $\chi = 2 - 2g$ が成り立つことが知られている．



$$\chi(K) =$$



$$\chi(K) =$$



$$\chi(K) =$$



$$\chi(K) =$$

【不思議な曲線や曲面】

(1) メビウス (1790-1868) の帯 (表裏のない曲面)

(2) クラインの壺 (3次元内では実現できない曲面)



メビウスの帯

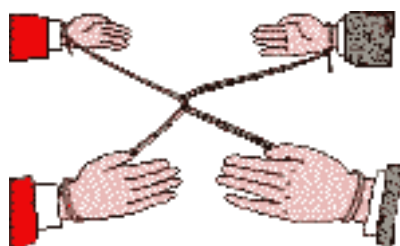
(3) 結び目 (knot theory)

トーラスノット



三葉結び目 (Trefoil knot)

演習：キミは両手首の輪をはずせるか？

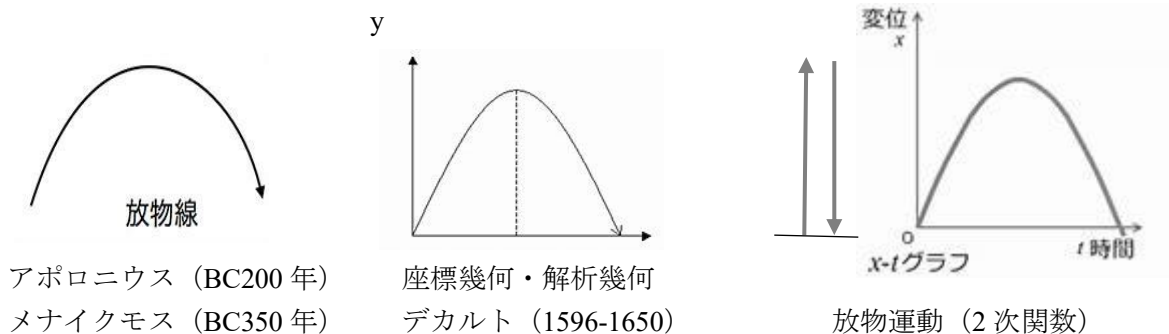


第4回 関数の指導について

I 関数の指導にあたって（線型代数と微分・微分方程式を目指して）

問：関数とは？（function）（函数）（cf. 写像：map とは）（←明治時代の名訳 cf. 有理数）

○関数の歴史（放物線を例に：幾何 → 解析へ）



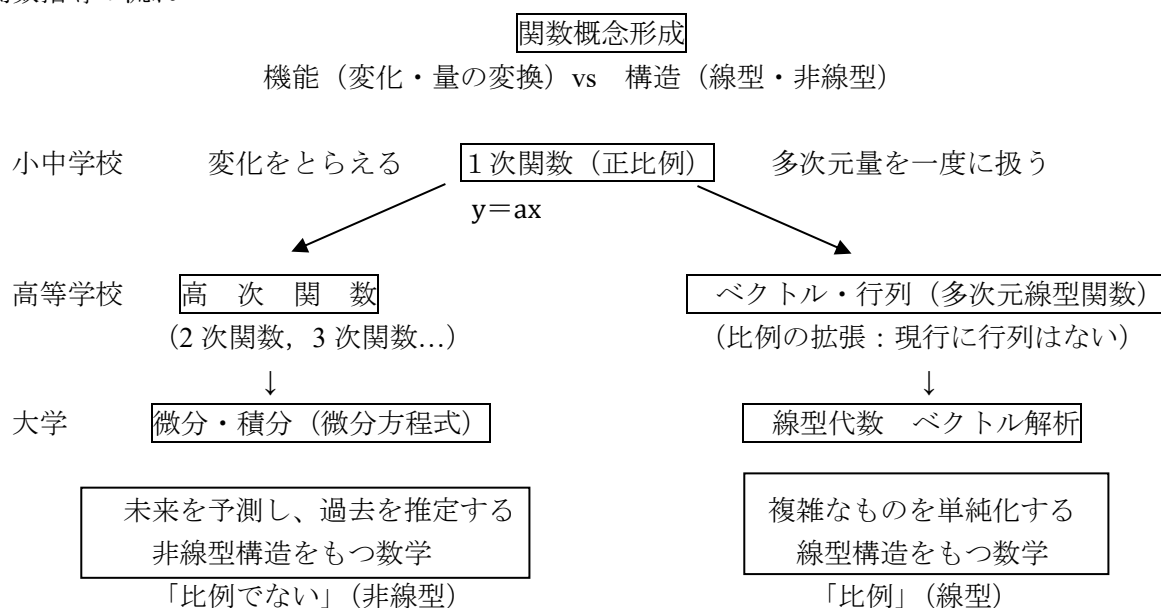
注) 中世の物理学者は、速度の概念（空間を時間に対する比）という考えをもたなかったといわれる。比は同じ単位でしか考えず、距離なら距離どうし、時間なら時間どうしとしか考えられなかったようである。12C 頃になってゲラルドスという物理学者あたりによって速度を距離（空間）と時間という異なる量どうしの比を定めるようになったといわれ、物理的運動が数学的理論によって語られるようになった。

- ・ニュートン (Newton : 1642-1727), ライプニッツ (Leibniz : 1646-1716) (微分積分の確立)
- ・オイラー (Euler : 1707-1783) が現代的な意味での関数の概念を確立

◎数学は自然科学の歴史とともに歩んできた（自然哲学）。

ゼノンのパラドックス → アリストテレスの運動論 → コペルニクス（地動説） →
ガリレオの落下運動・慣性の法則 → ケプラーの3つの法則 → ニュートン力学 →
マクスウェルの電磁方程式 → アインシュタインの相対性理論 → 量子力学 → 統計力学

II 関数指導の流れ



Ⅲ 「変化をとらえるもの」としての関数

1 正比例から1次関数へ ($y = 2x$ と $y = 2x + 1$ との違いは)

$y = 2x$								$y = 2x + 1$							
x	1	2	3	4	5	6	7	x	1	2	3	4	5	6	7
y	2	4	6	8	10	12	14	y	3	5	7	9	11	13	15

比例

比例しない

差をとると,

Δx	1	1	1	1	1	1	1	Δx	1	1	1	1	1	1	1
Δy	2	2	2	2	2	2	2	Δy	2	2	2	2	2	2	2

$\Delta y = 2\Delta x$ (比例する)

この差の部分(差分)は, 1次関数(アフィン構造)に付随する線型部分(ベクトル構造)という非常の重要な概念である.(決定的な違いは, 通常の加法が可能かどうかである)

【アフィン構造の例】・・・時刻, 温度, 座標

【ベクトル構造の例】・・・時間, 温度差, ベクトル

問: 次の加法を考えよう (どの加法が有効だろうか?):

$2\text{時}30\text{分} + 1\text{時}20\text{分} =$ $30^\circ\text{Cの水} + 50^\circ\text{Cの水} =$
 $2\text{時間}30\text{分} + 1\text{時間}20\text{分} =$ $30^\circ\text{C上昇} + 50^\circ\text{C上昇} =$
 $2\text{時}30\text{分} + 1\text{時間}20\text{分} =$ $30^\circ\text{Cの水} + 50^\circ\text{C上昇} =$

ただ, アフィン構造にも特殊な加法が存在する.(分点の公式)

・ $(2\text{時}30\text{分} + 1\text{時}20\text{分}) \div 2 = 1\text{時}55\text{分}$ (中間時刻)

・ 点 P (1, 2), 点 Q (3, 4) の分点 $\frac{mP+nQ}{m+n}$

○まとめ

$y = 2x$ と $y = 2x + 1$ の違い (線型・ベクトルとアフィンの違い)

和の保存性 (線型性) すなわち $f(x+y) = f(x) + f(y)$ が成立するか否かの違い.

$f(x) = 2x + 1$ はだめ

$1 \rightarrow f(1) = 3$

$2 \rightarrow f(2) = 5$

↓ ↓

$3 \rightarrow f(3) = 7$

$f(x) = 2x$ は OK

$1 \rightarrow f(1) = 2$

$2 \rightarrow f(2) = 4$

↓ ↓

$3 \rightarrow f(3) = 6$

すなわち, 1次関数: $f(x) = 2x + 1$ は正比例部分である $\vec{y} = 2\vec{x}$ をもつということが言える.

2 1次関数から微分方程式へ (変化をとらえる流れ)

この流れは「微小な変化をとらえて大域的な変化を解析し, 未来を予測し, 過去を推定する」である. 中等教育(中学, 高等学校, 大学初年級)での関数指導の大きな目標の一つは微分方程式的な概念の形成である. それは, この考え方が自然科学的手法であるからである.

例題：目の前にある何か変化するものを取り上げる（投げ上げたボールの動き，バクテリアの個体数，走っている電車の動き，気象状況など）。

目的となる量 y をある量 x にともなって変化する量とする（例えば， x は時刻）

Δx : x の微小変化量 Δy : y の微小変化量

とすると，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

は微小変化の割合になる．われわれは日常的に，この $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ （微小な変化）から y （実態）を解析（予想）することはよくある．しかし，これについて離散的な手法（差分）をとるか連続的な手法（微分）をとるかは対象とするものによって異なる．バクテリアの個体数などを解析する場合は離散モデルの方がいい場合がある．

（１）離散的な手法（差分方程式）数列・・・漸化式との関係

(i) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: 定数の場合 : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ の時，

→ 比例 → y は 1 次関数

x	: 1	2	3	4	5	6	7
y	: 2	4	6	8	10	12	14
Δy		2	2	2	2	2	2

変化の規則

$$\Delta x = 1$$

$$\Delta y = 2$$

$$\text{漸化式: } y_{n+1} - y_n = 2$$

実 態

$$y = 2x$$

1 次関数

(ii) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: 定数でない場合 : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + 1$ の時，

x	: 1	2	3	4	5	6	7
y	: 1	4	9	16	25	36	49
Δy		3	5	7	9	11	13

変化の規則

$$\Delta x = 1$$

$$\Delta y = 2x + 1$$

$$\text{漸化式: } y_{n+1} - y_n = 2n + 1$$

実 態

$$y = x^2$$

2 次関数

(iii) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: 定数でない場合 : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y$ の時，

x	: 1	2	3	4	5	6	7
y	: 2	4	8	16	32	64	128
Δy		2	4	8	16	32	64

変化の規則

$$\Delta x = 1$$

$$\Delta y = y$$

$$\text{漸化式: } y_{n+1} - y_n = y_n$$

実 態

$$y = 2^x$$

指数関数

練習 : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x + 1$: $y(1) = 1$ の時， y を求めなさい．

（これは，漸化式 : $y_{n+1} - y_n = 3n^2 + 3n + 1$, $y_1 = 1$ を解くことと同じ．）

$$(y = x^3)$$

(2) 連続的手法 (微分方程式)・・・ Δx を限りなく小さくすると微分方程式になる.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = 2$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = 2x + 1$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y$$

IV 1 次関数からベクトル・行列へ (多次元量を一度に扱う流れ) (参考資料を参照)

ここでは、アフィン空間とベクトル空間 (線型空間) の違いを意識しよう.

注) 現行の学習指導要領から「行列」がなくなり, 次期学習指導要領からは, 「ベクトル」は数学 C に置かれることになった (現行では, 数学 B に置かれている)。これは, 大きな問題だと思う。

V 「量の変換」としての関数 (対数関数を例に)

関数の働きとして, 規則性や変化の様子をみるだけでなく, ここで述べるように量の変換としての働きがある (人間が認識しやすいように, 関数で認識を変換する)。特に対数関数は非常に重要である。それは自然界が指数モデルが多いため, 対数に変換することで「線型」にできる。

問: 物価が昨年 10% 増で今年 10% 増なのに, 2 年間では 20% 増にならない。どうしてだろうか?

これは, 人間がもつ基本的な数学的認識である「線型性」にもとづく誤解で,

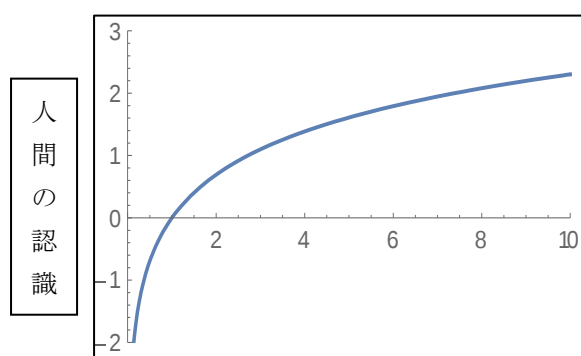
$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$$

とする誤解と同じである。

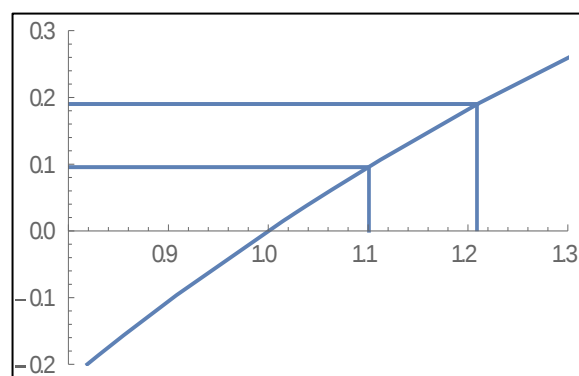
上記の例の場合の解決策として, 量を対数関数で変換することで非常に分かりやすいものになる。すなわち, 物価が 10% 増 → 10% 増を対数をとることで,

$$\log(1.1 * 1.1) = \log(1.1) + \log(1.1) = 0.095 + 0.095 = 0.19 = \log(1.21)$$

となり, 9.5% 増えて, さらに 9.5% 増えて, 計 19% 増えたということが出来る。



自然界の現象



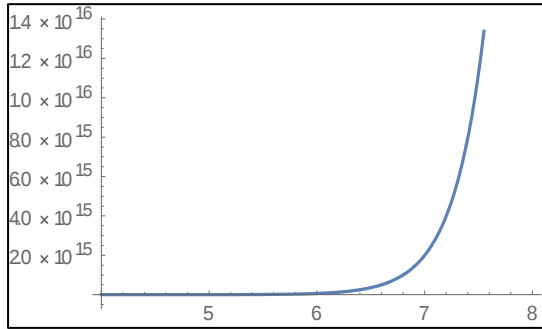
$y = \log x$

【マグニチュード】 (magnitude)

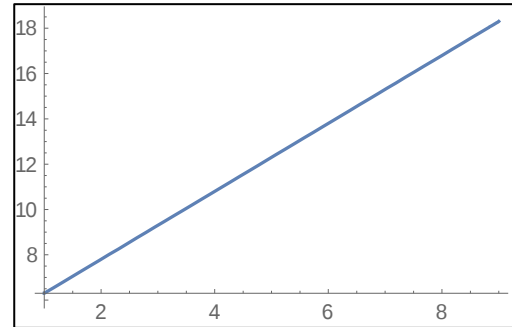
マグニチュードの定義はさまざまだが、エネルギーによる一般的な定義は、 E : エネルギー (単位:ジュール), M をマグニチュードとすると、

$$E = 10^{4.8+1.5M} \quad \text{つまり} \quad \log_{10} E = 4.8 + 1.5M$$

とする. すなわちマグニチュードが 1 増えるとエネルギーは $10^{1.5} = 31.62$ 倍になるので, 2 増えると約 1000 倍になることになる.



$$E = 10^{4.8+1.5M}$$

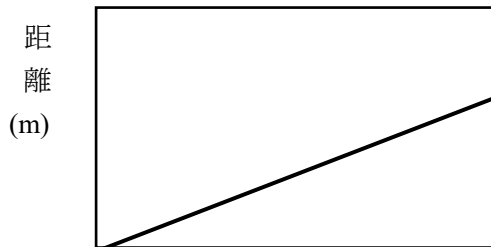


$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5M$$

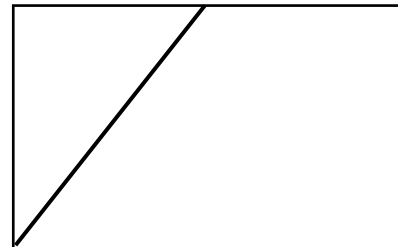
このように対数関数は、酸アルカリの pH 濃度や地震のマグニチュード、音の大きさデシベルなどの単位に用いられる.

VI : 体感する関数 : 距離センサーを用いて

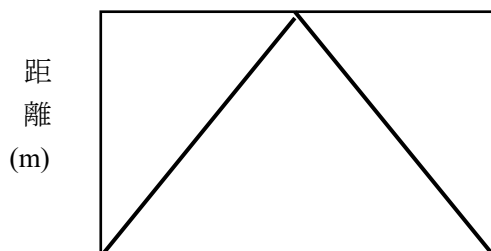
次のようなグラフを「距離センサー」を用いて描画してみよう.



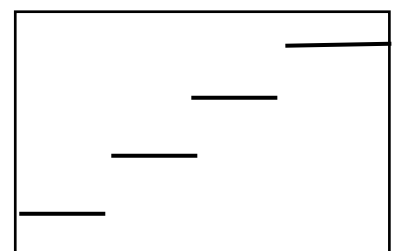
時刻 (t)



時刻 (t)



時刻 (t)



時刻 (t)

※使用した距離センサーは、米国 Vernier 社の Go Direct 距離センサー.

【参考資料】 1 次関数からベクトル・行列へ（多次元量を一度に扱う流れ）

I $y = ax$ から $Y = AX$ へ

TSUDAJUKU 高校ホメオ君の家は酒屋さんをやっている。この頃勉強にも余裕がでてきたのか、お店の配達を手伝うこともしばしばである。彼には中学生の弟トオル君と小学生の妹ユカコちゃんがいる。

「ただいまあー！」とユカコちゃんが学校から帰ってきた。

「おかえり」

「ねえ、兄ちゃん正比例ってしっている？」

「なんだ、やぶからぼうに。バカにすんなよな、おれは天下の TSUDAJUKU 高生だぞ！」

「じゃあ、教えてよ」

「ん、だから、一方が 2 倍になれば、他方も 2 倍になる！」

「たとえば？」

「例えばさあ、肉まん二つ買うと値段も 2 倍になる！ そんなことだよ」

「そういうの、 $y = ax$ みたいな 1 次関数ってやつじゃないの」とトオル君

「おまえ、よく知っているじゃん！」

「まあね」

「1 次関数ってなあに？ 正比例と関係あるの？」

すると、店の方からおとうさんが呼んでいる声がする。

「おい、一丁目の大隈先生んちに、いつもの 2 倍の砂糖と日本酒を届けてくれー」

「両方とも 2 倍？」

「そうだよ、伝票ここにおいとくからね。代金もらって来て。いつもの 2 倍だよ。」

「おい、わかった」

「兄ちゃん、重さも 2 倍だね」とユカコちゃん。

「えっ重さ？ そうか重さも 2 倍じゃねえの、かったるいな！」

「兄ちゃん、砂糖・お酒が 2 倍になると、代金、重さも 2 倍になるからこれも正比例？」

「そうだなあー、これも比例？！ 比例って言うのかなあ。トオルわかる？」

「分かる訳ないよ」

<解説>

お酒：(600 円／本，1kg／本) 砂糖 (200 円／袋，2kg／袋)

とすると，

(1) ユカコちゃんレベル (正比例)

お酒	1 本	2 本	3 本
値段	600 円	1200 円	1800 円
重さ	1 kg	2kg	3kg

砂糖	1 袋	2 袋	3 袋
値段	200 円	400 円	600 円
重さ	2kg	4kg	6kg

(2) トオル君レベル (1 次関数)

お酒：値段： $y = 600x$

重さ： $y = x$

砂糖：値段： $y = 200x$

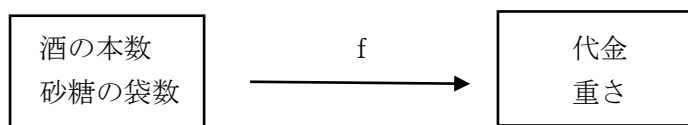
重さ： $y = 2x$

(3) ホメオ君レベル (行列)

お酒 x 本，砂糖 y 袋購入したとして，代金 x' 円 重さ y' kg とすると，

$$\begin{aligned}x' &= 600x + 200y \\ y' &= x + 2y\end{aligned}\quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 & 200 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

とかける.



2次元ベクトル空間

2次元ベクトル空間

x を 2次元ベクトル空間, A を 2×2 行列とすると,

$$f : X \longrightarrow AX \quad (Y=AX \text{ 2次元の比例})$$

このように, 多次元の比例は行列を用いることでうまく表現できる. 行列は比例定数の役割をする.

II $y=ax$ と $y=ax+b$ の違いは?

「でもさあ, ほんとに2倍になってないんじゃないの?」とトオル君.

「どうして?」

「だってさあ, 箱の重さを考えてみろよ, 自転車の荷台の. 酒, 砂糖で1本, 1袋ずつで3kg. あの箱どのくらいだろ, 0.5kgかな. まあそうすると, 3.5kgだろ. 酒, 砂糖2倍にすると, $2\text{kg}+4\text{kg}+0.5\text{kg}$ で6.5kg. ほら, 2倍じゃない!!」

「そりゃ, そうだ. 1次関数が $y=ax+b$ とかけることと同じじゃないの?」

「??????」

<解説>

いま, 配達代金を100円と考えて,

$$\begin{aligned}x' &= 600x + 200y + 100 \\ y' &= x + 2y + 0.5\end{aligned}\quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 & 200 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

とかける.

「ん, 1次関数って比例しないの? そんなことないよな... (for a while)」

「あつ, そうか! 定数項が0なら比例, そうでないなら比例でない!？」

「比例してなきゃ 何だよ」

「えー 比例しない1次関数!？」

「そんなのおかしいよ!」

「じゃあ, もう一度考えてみよう. $y=2x+1$ で考えると」

x	0	1	2	3	4	5	6	7	...
y	1	3	5	7	9	11	13	15	...

「あ, それ見たことある! 小学校のタケザワ先生は引き算が比例しているって言ってたよ」

「引き算? そうか, 差が比例しているってこと? トオル」

「兄ちゃん, やったね!」

「おい, なにぐずぐずしてんだよー, 大隈先生かんかんだよー 早く行っておくれ」

「わかった, 今行くー」

the END

第5回 微分積分の指導について①

ひとくちに微分積分というけれど、微分と積分は生い立ちが異なり、歴史的には積分の方がはるかに古い。まずは、面積・体積指導を通して小学校・中学校・高等学校としての「一貫性」に注目しよう。

I：素朴な疑問

- ・ 長方形の面積はなぜ「縦×横」なのか？
- ・ 面積の定義は？
- ・ 日本の国土の面積はどうやって測る？
- ・ 積分でなぜ面積が求まる？
- ・ 微分は接線、積分は面積。一方で、微分と積分が逆演算。接線と面積は逆の概念？

II：小学校、中学校、高等学校での量と測定、図形領域の扱い 教科書での扱い

<小学校での面積指導>

- 4年...面積の単位、正方形、長方形の面積
- 5年...三角形、平行四辺形、円の面積、円周率の意味
- 6年...およその面積、体積（立方体、直方体）

<中学校での面積指導>

- 1年...扇形の面積・弧長、柱体、錐体および球の表面積、体積

<高等学校での面積指導>

- 数学Ⅱ...微分・積分
- 数学Ⅲ...微分・積分

問：次の等式について自由に述べよ。

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \cdots (*)$$

ある人は「これは定積分の定義ですね」、またある人は「これがあの有名な微分積分の基本定理だよ」というかもしれない。この等式は「約束事」なのか、「成立するもの」なのか？

III：現代の高校数学の風景（積分の導入）

微分積分学を考察するにあたっては、完成されている体系としての「微分積分学」と、先人たちが苦労して築きあげてきた「微分」、「積分」という観点とがある。特に教育の場面での教授法の開発に当たっては、どちらを優先させるかが問題になることが多い。

【定積分の定義】

ここで高校数学での積分の導入を復習してみよう。連続関数 $f(x)$ の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を定義するとき、多くの数学Ⅱの教科書では次のように記述される。まず、関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)dx$ を微分の逆演算と定義し、 $F(x) = \int f(x)dx$ (原始関数) とおき、定積分を

$$\int_a^b f(x)dx := F(b) - F(a)$$

によって定義する。

【区分求積法での定義】

閉区間 $[a, b]$ において連続関数 $f(x)$ に対する $x = a$ から $x = b$ までの定積分をつぎのように定義する.

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(a + i\Delta x)\Delta x$$

例題：関数 $f(x) = 3x^2$ のグラフと x 軸と $x = a$ とで囲まれた図形の面積を求めよ.

いまや、高校数学での積分の導入に「区分求積的な方法」を扱わなくなってから久しい[注]. かつては無限級数を学習した後、区分求積法を計算した時代もあったが、昨今の高校生（いや先生方）にとってはこちらの定義のほうがスマートでかつよく、ファッションブルかもしれない. でも、積分の学習法として本当にいいのだろうか.

この「逆微分」による導入の問題点は、まず、もともと積分と微分はその歴史的生い立ちを異にする概念であるのに、この定義では積分が微分に従属してしまう点. もう一つの致命的な問題点は、 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ が本当に見つかるのかという点であり、そして原始関数がみつからないと定積分ができないのか、という点である（原始関数が見つからなくても一定の条件のもとで定積分は存在する！そもそも、定積分のイメージは微小量の無限和というものだからである）. それゆえ、教育的にも積分の歴史的な起源をひもとくことは重要な作業となる.

IV：積分はいつから（面積・体積を求める）

そもそも、積分の考え方は面積・体積を求める（否、定義するというほうが気が利いている）ことに起源がある. そしてさまざまな図形に関する面積を求めることの歴史は遠くエジプト文明にまで遡る. アーメスパピルスに記された幾何の問題では、二等辺三角形や等脚台形、さらには円の面積にまで言及しているという. またエジプト人は角錐の体積の公式（底面積×高さ÷3）も知っていたといわれるが、どのようにして到達したかは不明であるようだ. これらはナイル川やピラミッドの恩恵とも言われるがそれも定かでない.

ギリシア時代になると、数学の様相もエジプトやバビロニアの数学と違ってくる. それは、数学を生活全般に応用するものではなく、より精密な思考をとまなう哲学的な側面をもつものとしたからである. まずは、キオスのヒポクラテス（BC430 頃、医者で有名なのはコスのヒポクラテス）の取り組んだ月形求積問題で、円とは異なる曲線図形の求積法の取り組みである（図1）. また、原子論者として有名なアブデラのデモクリトス（BC460～370 頃）は幾何学者としても有名で、エジプト人がすでに知っていたピラミッド（角錐）の体積公式に対して、ある種の無限小的方法の適用を試みたようだ.

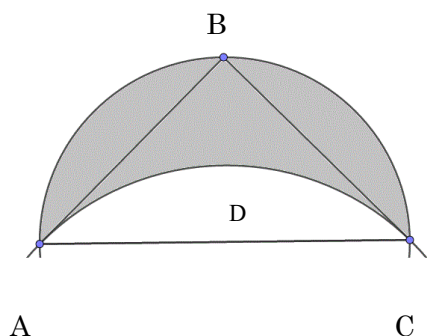


図1 月形 ABCD の求積
(但し、三角形 ABC は直角二等辺三角形、AC 上の弓形は AB 上の弓形と相似)

● エウドクソスの取り尽し法（積分の芽生え）

本格的に無限的手法を扱うのは、クニドスのエウドクソス(BC408?-355 頃)による「取り尽し法」と呼ばれるもので積分の源流ともいえる。

「不等な二つの量が与えられるとき、大きい量からその半分よりも大きい量を引く。この手続きを繰り返していけば、最初に与えられた小さい方よりも小さい量が残されるようになる」(ユークリッドの「原論」から)

これは、次の命題に適用されている。

命題「円の面積の比はそれぞれの円の直径上の正方形の面積の比に等しい」

証明は取り尽くし法と背理法を用いて行われるが、この命題は曲線図形の求積法として古代では初めて厳密な手法であったとされ、積分の芽生えとされている。

● アルキメデス（ギリシア時代のスーパースター）

そしていよいよ、シラクサのアルキメデス(BC287?-212)の登場である。かれは数学ばかりでなく「てこの原理」、「浮体について」についても古代一級の仕事をしている。主なものを列挙すると、次のようになる。

- ・ 円の円周と直径に比の概算について（円周率の近似値）
- ・ 螺旋について
- ・ 放物線の求積について
- ・ 球と円柱について

これらは取り尽し法や背理法を利用して厳密に取り組まれた。しかし、アルキメデスの死後、ギリシア数学は衰退し舞台はイスラムに移る。そして、アルキメデスの権威は輝き続けたが、歴史的必然である「無限の取り扱い」や「数学的形式の完成（記号の導入）」には、アラビア、イスラム、中世ヨーロッパを経て、17 世紀ヨーロッパの数学を必要とした。

● カバリエリの不可分量（17 世紀のイタリア学派へ）

この時代は、ギリシア（アルキメデスの厳密性）を捨て、論理的厳密さを犠牲にしながらも、「無限」に果敢にアタックしていった様子がうかがえる。その一つはカバリエリ(1598-1647)の不可分量(indivisible)という考え方である。かれはガリレオの弟子として、またトリチェリの兄弟子として知られているが、かれの求積法は手段として、この不可分量を用い、「線の indivisible は点で、その全体が線をなす」また「面の indivisible は線であり、その全体が面をなす」という言い方をする。これは厳密ではないが、線を「連続」に引っ張っていくと面が構成できるという、素朴な連続性を表している。そして有名なカバリエリの原理を残している。

「二つの平行線 L_1 , L_2 の間にはさまれた面積 S_1 , S_2 において L_1 に平行にひいた平行線からつねに等しい線分 ($s_1=s_2$) が切り取られるならば、面積 S_1 と S_2 は等しい」

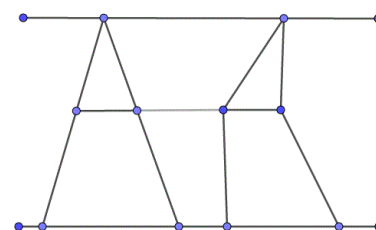
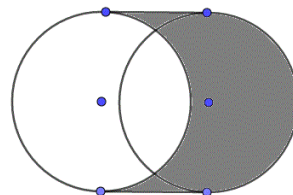


図2 カバリエリの原理

練習：右図の斜線部の面積を求めなさい。

ただし、半径 4cm，移動距離 5cm



● 無限の萌芽（幾何的，代数的な側面から）

カバリエリの不可分量 (indivisible) をもとに「無限小線分の総和」「無限小面分の総和」という考えにいたったのはパスカル(1623-1662)である。かれの考えは極限概念までには成熟していなかったようだが，カバリエリが 1 次元低い不可分量の全体で面積・体積を考えたのに対し，パスカルは同次元の無限小の図形で面積・体積を扱ったという点で特筆される。

代数的な方面からはイギリスの数学者でニュートンに影響を与えたウォリス(1616-1703)が登場する。かれはその著書「無限の数論 (Arithmetica infinitorum)」の中で，数論的な考えから求積問題（平行四辺形と半 3 次放物線に関する面積比）を扱った。こうして，無限小幾何，無限級数等が出揃い，いよいよ微積分の誕生となる。

● ニュートン・ライプニッツの微分積分とその後

ギリシアの数学以来，求積法，不可分量，そして無限の数論へと数学が発展してきたことを見てきたが，これまでの数学には，今の概念でいう「微分」が決定的に欠けていた。ニュートン(1642-1727)はこの概念を「流率 (fluxio)」として，そしてライプニッツ(1646-1716)はいわゆる無限小解析を創りだす。そして二人は独立に微分積分に取り組み，さらに微分と積分とが逆の演算であることに気づいていたようである。また，ライプニッツが形式的に d と $\int$ を導入し，これらの関係を捉える試みもしたようだ。

この辺りについては本稿の手に余るので省略するが，まさに微分積分誕生の中心的な時期である。

その後，積分にかかわる演算規則はヨハン・ベルヌーイ (1669-1748) に負う。そしてかれは「任意の変量の微分を作ることとは容易であるが，任意の変量の積分を求めることは難しい。時には与えられた量の積分を求め得るかどうか分からない場合もある」と述べ，微分と積分との違いを感じとっている。

このように 17 世紀は微分優先の時代で，積分が微分に従属して扱われる。積分の復権には 19 世紀から 20 世紀へと続くリーマン(1826-1866)の積分，ルベーグ(1875-1941)の測度の概念が必要であった。

●そして再び，現代の高校数学の風景（高校・大学一貫カリキュラムへ）

さて，再び現代へ。高校で扱う関数は一変数関数でも比較的温和なものなので，逆微分の定義による定積分の計算はあまり支障はない。しかし一方，大学での数学では一変数で応用上重要な

$\int e^{-x^2} dx$ （確率統計に関係が深い） や ガンマ関数 $\int e^{-x} x^{y-1} dx$ ($y > 0$) など扱う（被積分関

数が初等関数のみからなるにもかかわらず，不定積分は初等関数のみによって表せない例）訳だし，二変数関数 $f(x, y)$ の定積分（重積分）の扱いになると逆微分の定義では学習上困難になる。

【参考図書】

次は数学史に関しては，気楽に読めるものばかりである。しかし，アルキメデスに関して [7], [8] はかなり本格的な専門書である。暗黒の中世の科学史に光をあてたものとして [10] にも注目してみよう。

[1] T. L. ヒース，平田寛訳『ギリシア数学史 I・II』，共立出版，1959.

[2] ボイヤー，加賀美鐵雄他訳『数学の歴史 1・2』，朝倉書店，1983.

- [3] ブルバキ, 村田全, 清水達雄訳『数学史』, 東京図書, 1970.
- [4] ボッホナー, 村田全訳『科学史における数学』, みすず書房, 1970.
- [5] E. T. ベル, 田中勇, 銀林浩訳『数学をつくったひとびと上・下』, 東京図書, 1976.
- [6] 中村幸四郎『近世数学の歴史』, 日本評論社, 1980.
- [7] 上垣渉『アルキメデスを読む』,
- [8] 佐藤徹訳『アルキメデス方法』, 東海大学出版会, 1990.
- [9] 森毅『数学の歴史』, 紀伊國屋書店, 1979.
- [10] 伊東俊太郎『近代科学の源流』, 中央公論社, 1978.
- [11] 現代思想『数学の思考』, 青土社, 2000.

〔注〕 学校数学での面積の登場は小学校 4 年の算数である. ここでは, 長方形や正方形の面積を扱う. 小学校 5 年になると, 平行四辺形や三角形の面積だけでなく, 「およその面積」ということで, 区分求積法の真似事を扱う教科書があって面白い. その後, 中学校の数学を経て, 高等学校では数学Ⅱ, 数学Ⅲで「微分積分」の中で求積を扱うことになる. 積分の扱いは戦後いくつかの指導要領の改訂を経てきている. 特に, 第 3 回学習指導要領 (1970 年 (昭和 45 年) 10 月 15 日告示) の改訂以後, 数学Ⅱでの積分の扱いが大きく変化した (いわゆる現代化の時期). それは,

○1970 年以前: 区分求積→定積分→不定積分

とする教科書が多かったにもかかわらず,

○1970 年以後: 不定積分 (逆微分) →定積分 (区分求積や無限級数は数学Ⅲへ)

となった (実際には 1973 年 (昭和 48 年) 4 月検定教科書以降).

なぜ, このような扱いになったのだろう. 「高等学校学習指導要領解説 (数学編) 文部省 1972」によると

数ⅡB の積分について「厳密な扱いは避け, 平易に学習をすすめることによって積分の概念の大筋をつかませることが肝要」とある. さらに数Ⅲでは「...数列の極限についても学習するので, これに関連して区分求積の考えかたにもふれ, 微分法の逆演算としての積分法の威力を再認識させるのもよいであろう...」とある.

そして, いまや高校の数学教科書のほとんどでは, 積分は「逆微分」から導入され, 導入部分に区分求積の手法を用いているものはない.

【宿題】 (来週までに取り組んでください)

I : 半径 a , 高さ $2a$ の円柱を底面の直径を含み, 底面と 45° の角をなす平面で切断する. このときにできる小さいほうの立体を V とする. V の体積を次の 2 つの方法で求めなさい.

(1) 直径に対して垂直の切断する場合

(2) 原点を含むように切断する場合

II : I の立体 V の側面積を求めなさい.

第6回 微分積分の指導について②

【宿題】

I：半径 a ，高さ $2a$ の円柱を底面の直径を含み，底面と 45° の角をなす平面で切断する．このときできる小さいほうの立体を V とする． V の体積を次の 2 つの方法で求めなさい．

(3) 直径に対して垂直の切断する場合：

$$V = \int_{-a}^a S(x) dx = \int_{-a}^a \frac{1}{2}(a^2 - x^2) dx = \frac{2}{3}a^3$$

(4) 原点を含むように切断する場合：

$$V = \int_0^\pi S(\theta) d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{2}a^2 \sin \theta d\theta = a^2 ??$$

これでは求まらない．ここでは微小部分に注意を払う必要がある．

$$\Delta V = \frac{1}{3}a \cdot a \sin \theta \cdot a \Delta \theta \text{ なので,}$$

$$V = \int_0^\pi S(\theta) d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{3}a^3 \sin \theta d\theta = \frac{2}{3}a^3$$

となり，(1) と一致する．

II：I の立体 V の側面積を求めなさい．

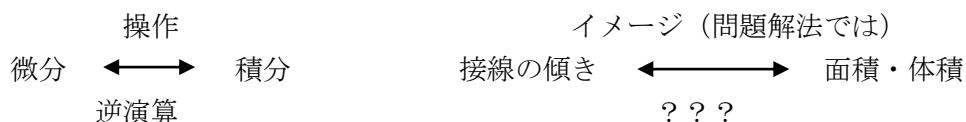
$$\Delta S = a \sin \theta \cdot a \Delta \theta \text{ なので,}$$

$$S = \int_0^\pi a^2 \sin \theta d\theta = 2a^2$$

と求まる．

浴場から素裸で飛び出し“ユリイカ（わかった）”と叫んで，浮力の原理を発見したといわれるアルキメデスはまた，「区分求積法」と呼ばれる方法で円の面積や球の体積を求めたといわれる．一方，17C になると，物理学者でもあるニュートンとライプニッツが微分学を創り出した．そして，区分求積法から考えられた積分と微分とが互いに逆演算であることも発見された（微分積分学の基本定理はスゴイのです！）．

現代の高校生は，積分の定義を逆微分とする．これはなかなかスマートなやり方である反面，面積や体積がなぜ定積分で求まるかがイメージしにくい．それと同時に微分と積分が逆演算であるのに，微分のイメージ＝接線の傾き，積分のイメージ＝面積とがうまく結びつかないのではないかな．ここでは主にこのことを考えていこう．



I 面積のイメージ（区分求積法）

(1) 切り方が問題だ

今までは無意識に面積は線を積分，体積は面を積分という感じであったが，実はその考え方は誤解を招きやすい．積分を用いて面積・体積を求めるときは「微小部分」の考え方が重要になる．

$$\Delta V = S(x) \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad V = \int S(x) dx$$

(2) 区分求積法

閉区間 $[a, b]$ における連続関数 $f(x)$ に対して、関数 $f(x)$ のグラフと x 軸および $x = a, x = b$ によって囲まれた部分の面積は、次のように求めることができる（簡単のためにここでは、 $f(x) \geq 0$ かつ単調増加にする.）.

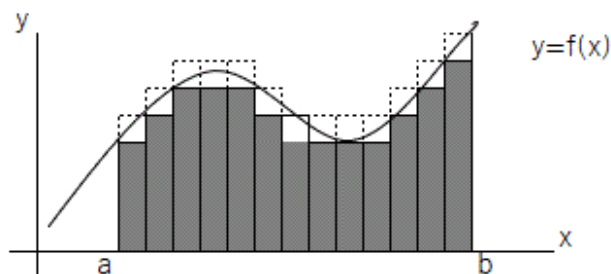
閉区間 $[a, b]$ を n 等分してひとつの幅 $\frac{1}{n}(b-a) = \Delta x$ として $x_i = a + i \Delta x$ とおき、

$$I_l(n) := \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x, \quad I_u(n) := \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

とすると、 $f(x) \geq 0$ かつ単調増加により、

$$I_l(n) \leq I_u(n) \quad (for \forall n)$$

が成り立ち、 $n \rightarrow \infty$ とすると、



$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_l(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_u(n) = I$$

が成立するならば、この値 I のことを 閉区間 $[a, b]$ における連続関数 $f(x)$ の定積分と定義し、

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad \dots (*)$$

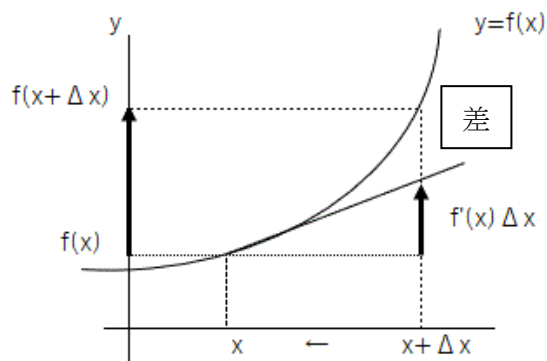
と表す.

II 接線のイメージ vs 積分

それでは、微分=接線のイメージがどのように積分に翻訳されるだろうか（右図）.

1 接線のイメージは近似的変化

そもそも微分するということは、ミクロの世界を覗くことである.

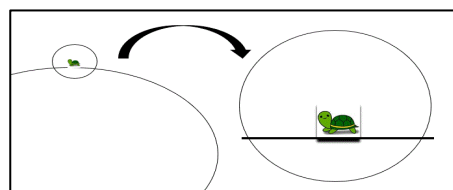


x が $x + \Delta x$ まで Δx だけ変化すると、 y は $f(x + \Delta x) - f(x)$ だけ位置変化する. Δx が比較的に大きい場合、 $f(x + \Delta x) - f(x)$ と $f'(x) \Delta x$ との差は大きい. が、 Δx をどんどん小さくするとその差はどんどん縮まる. つまり、

$$\left[\begin{array}{ccc} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) & & \\ f(x + \Delta x) - f(x) & \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} & f'(x) \Delta x \\ \text{(ミクロの位置の変化)} & \text{微分 (細かく分ける)} & \text{(傾き} \times \text{区間長)} \\ \text{(非線型)} & & \text{(線型)} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{微分 (=接線)} \\ \text{(近似的変化)} \end{array}$$

クロの世界での曲線の位置変化は近似的には直線の変化とみなせる.

注) 微分とは、曲線を近似的に直線とみなすこと.



2 積分することは変化の総和のイメージ

右図の $y = f(x)$ では $[a, b]$ において,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f'(x_i) \Delta x = \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

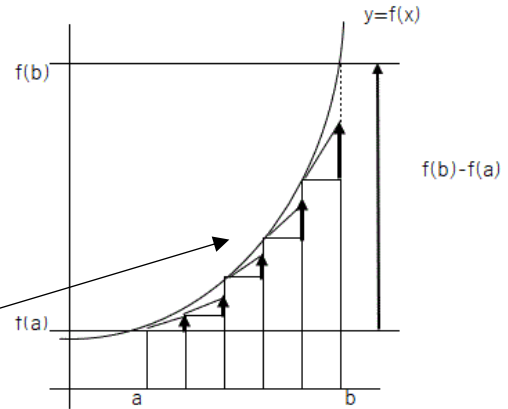
が成立し、左の等号は上の(*)により、右の等号は「微分積分学の基本定理」による。

この等式は積分が面積や体積を求めるイメージというよりも、

総和 (ミクロ世界の位置変化) $= \sum_{i=1}^n f'(x_i) \Delta x$
とみなし、 $n \rightarrow \infty$ とすることで、

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

となり、速度を積分するとキョリが求まるのはこのことによっている。すなわち、総位置変化を求めるために、



$$\left[\begin{array}{c} \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) \\ f(x + \Delta x) - f(x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f'(x) \Delta x \xrightarrow{\lim \sum} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f'(x_i) \Delta x = \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) \\ \text{(微小な位置変化)} \quad \text{微分} \quad \text{(瞬間速度} \times \text{時間)} \quad \text{積分 (積み重ねる)} \quad \text{(総位置変化)} \\ f(a) + \int_a^b f'(x) dx = f(b) \\ \text{始点} \quad \text{変位} \quad \text{終点} \end{array} \right]$$

積分 (変化の総和)

となるので、「微分=接線」のイメージは「積分=変化の和」というイメージが対応する。

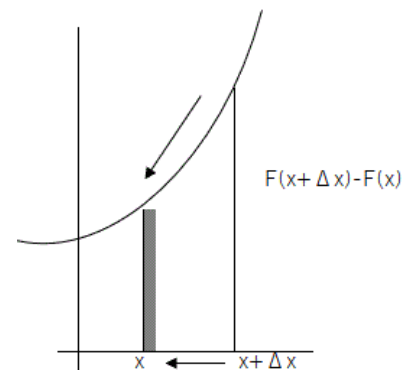
III 面積のイメージ vs 微分

積分=面積のイメージでは微分をどのように考えていけばよいのか。

1 面積を微分すると縦線のイメージ (密度)

$F(x)$ を面積関数 ($f(x)$ の原始関数) とすると、面積関数を微分することは、

$$\left[\begin{array}{c} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x) \\ F(x + \Delta x) - F(x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \Delta x \\ \text{(面積の変化)} \quad \text{微分: 細かく分ける} \quad \text{(微小な縦線)} \\ \text{(非線型)} \quad \quad \quad \text{(線型)} \end{array} \right]$$



微分 (=縦線)

となり、「積分は面積」のイメージに対応するのは「微分では縦線 (微小な面積密度)」ということになる。

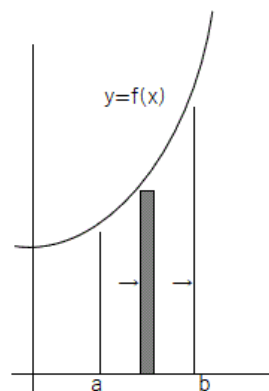
2 再び面積のイメージ（積分）

I で求めたように、積分が面積というのは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

ということだった。但し、 $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数とする。

すなわち、総面積（総体積）を求めるために、



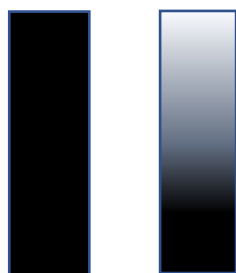
$$\left[\begin{array}{ccccccc} F(x + \Delta x) - F(x) & \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} & f(x) \Delta x & \xrightarrow{\lim \sum} & \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \\ \text{(微小な面積変化)} & \text{微分} & \text{(微小な長方形)} & \text{積分：積み重ね} & \text{総面積} \end{array} \right]$$

積分（＝面積）

また、この積分の考え方は「質量＝密度×体積」の考え方にも応用できる。

練習：底面積 10 cm^2 の円柱の容器の中ににごった水が入っていて、水の深さは 50 cm である。このにごり水の密度は容器の底部では 2 g/cm^3 ，表面では 1 g/cm^3 で、深さとともに一様に変化しているものとする。このとき、このにごり水の質量を求めてみよう。

(750g)



密度一定 密度一様に変化

IV：ともかく

微分積分の極意は、複雑な運動（位置変化）や複雑な面積・体積の計算が、無限小の世界においては小学校以来の基本公式である、

$$\text{距離} = \text{速度} \times \text{時間}, \quad \text{面積} = \text{底辺} \times \text{高さ}$$

で済んでしまうところに、人間の思考の限界というか、微分積分のスゴサというものがある。「曲線を近似的に直線と思え」なんてなんと人間的ですね。

【参考図書】

微分積分の意味が数学的にわかりたい人へ：

森毅：「微積分の意味」，日本評論社，1980.

森毅：「現代の古典解析」，日本評論社，1985.

小島順：「微積分入門」上下，日本評論社，1996.

古典的なものとして：

高木貞治：「解析概論」，岩波書店，1938.

S.Lang：「解析入門」（松坂和夫・片山孝次訳），岩波書店，1978.（お二人とも津田塾の先生でした）

気軽に読めるものとして：

吉田洋一・赤撰也：「数学序説」，培風館，1954.

第7回 確率の指導について①

問：偶然とは（因果関係）

人間の営みは、因果関係の連続とも言える。道でお金を拾えば「良い行い」の結果だと思い、おみくじで「凶」を引けば「日ごろの不心得」のバチがあたったのだと思う。これらは元をたどれば、われわれが日常的に神や仏といった超自然的な「意思」にゆだねている証拠かもしれない。しかし、自然科学の歴史をたどれば近代合理主義には「神」は不要で、これらは「偶然」として処理され、人間の無知から発生するこの「偶然」を、人間の知識の獲得（微分方程式など）によって、「必然」（因果論的決定論）に置き換える努力を重ねてきたともいえる（vs 神、因縁、運命、宿命）。

- ・プラトン（イデア：現実世界の理想化）
- ・アリストテレス（物事の原因…質量因，動力因，目的因，形相因）
- ・デカルト（機械論的自然観：心身二元論。人は神に従い，自然は物理的法則に従う）
- ・ニュートン（微分積分による宇宙観：自然は数学的に厳密に記述され，過去，未来は決定され，偶然の余地はない）
- ・ラプラス（1749-1827：決定論的世界観：ラプラスの悪魔（デモン）の一節）

「…ある知性（デモン）が与えられた瞬間における，自然を動かしているすべての力と自然を構成しているすべての存在物の各々の状態を知っているとし，さらにこれらの与えられた情報を分析する能力を持っているとするならば，この知性は同一の方程式のもとに宇宙の中の最も大きな物体の運動も，また最も軽い原子の運動をも包摂せしめるであろう。この知性にとって不確かなものは何一つない。…」

「確率の解析的理論：1812」より

（cf：量子力学：原子の位置と運動量は同時に正確に測定できない：不確定性原理）

※ラプラスが考える確率とは：

この悪魔を信じるラプラスにとって確率とは何だったのだろうか。かれは次のように言っている。

「天文学が示すような規則性がどのような現象についても成立していることは，全く疑いがない。空気や水蒸気のただ一つの分子が描く曲線も，惑星の軌道と同様正確に定められている。われわれが無知だから二つの間に違いがあると思うに過ぎない。確率は，一部は無知に相対的であり，一部はわれわれの知識に相対的である。」

「確率の解析的理論：1812」より

つまり，かれにとって偶然は人間の無知によるものであり，無知に限定された知識に関して「確率」の概念が必要と考えたようだ。

問：何を期待するとき，サイコロを投げるのか？

また，サイコロを投げたとき6の目が出る確率が $1/6$ とはどういうことなのか？

I：確率の歴史

まず確率論発祥の古来有名な問題にアプローチする．これは、1654 年フランスでの出来事、シュバリエ・ド・メレ（Chevalier de Mere）に関する問題として有名である．

Q1：A と B が次のような賭けをする．「B が 1 つのサイコロを投げ、ある回数以内に、少なくとも 1 回 6 の目が出たら B の勝ちとする」さて、その回数を何回と宣言すると B は賭けに勝つだろうか．
解説：サイコロを n 回投げた時、少なくとも 1 回、6 の目が出る確率が 2 分の 1 より大きくなるには、

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{1}{2}$$

を解けばよく、Mathematica で計算すると、

```
Table[N[1 - (5/6)^n, 3], {n, 1, 10}]
```

```
Out[1]={0.167, 0.306, 0.421, 0.518, 0.598, 0.665, 0.721, 0.767, 0.806, 0.838}
```

となるので、4 回目が境になる．

Q2：A と B が次のような賭けをする．「B が 2 つのサイコロを同時に投げ、ある回数以内に、少なくとも 1 回は、2 個とも 6 の目が出たら B の勝ちとする」その回数を何回と宣言すると B は賭けに勝つだろうか．

解説：Q1 と同様に考えると、

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > \frac{1}{2}$$

```
Table[N[1 - (35/36)^n, 3], {n, 20, 30}]
```

```
Out[12]={0.431, 0.447, 0.462, 0.477, 0.491, 0.506, 0.519, 0.533, 0.546, 0.558, 0.570}
```

となるので、25 回が境目になる．

ちょっと、ここで振り返ろう．そもそもサイコロ実際に投げた時、例えば 6 の目の出る確率は $1/6$ 、すなわち 6 回に 1 回の割合で 6 の目が出るのだろうか．さらにサイコロの目 1, 2, 3, 4, 5, 6 がそれぞれ同じ割合で出るのだろうか．結論を先にいうと、どの目も同様に「出る」理想的なサイコロであると想定し、そうすることが妥当であると考えることが自然なのである．

さて、この問題にはいわれがあって、件のド・メレ氏はいろいろ悩み、ブレーズ・パスカル（Blaise Pascal : 1623-1662）氏に相談した．ド・メレ氏は、まず 1 つのサイコロで考えた．すなわち、6 の目を出そうとするならば 4 回と宣言すれば有利となること知っていたので、サイコロが一つ増えれば目の出方が 6 倍になるので $4 \times 6 = 24$ 回で有利になると考えた．しかし、パスカルはフェルマーとの文通を通して、24 回でなく 25 回で有利になるとド・メレ氏に伝えたといわれている．

この人物こそ確率の父と呼ばれ「考える葦」で有名なあのパスカルであり、これにピエール・ド・フェルマー（Pierre de Fermat : 1607or1608-1665）、そしてオランダのクリスチャン・ホイヘンス（Cristian Huygens : 1629-1695）なども関わり、数学的確率論が発祥したといわれている．

練習：誕生日問題

あるクラス 30 名の中で、少なくとも 2 人の誕生日が同じである確率はどのくらいだろうか。
解説：n 個の要素を持つ母集団と標本の大きさが r の場合、復元抜き取り、非復元抜き取りは各々、

$$n^r, \quad (n)_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$$

の標本となる。すると、「重複がない抜き取り」の確率は、

$$P(n, r) = \frac{(n)_r}{n^r} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right)$$

となる。この問題の場合、1 年間を 365 日として、

$$P(365, 30) = \frac{(365)_{30}}{365^{30}} = \left(1 - \frac{1}{365}\right) \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{29}{365}\right)$$

さすがにこれは大変なので、Mathematica で計算すると、

$$P[n, r] := \frac{n!}{(n-r)! * n^r}$$

$$P[365, 30] // N$$

$$0.293684$$

となり、求めるものはこの「重複がない抜き取り」の余事象なので、0.706316 となる。

因みに 10 人から 100 人まで 10 人刻みで計算すると、

$$N[\text{Table}[1 - P[365, i], \{i, 10, 100, 10\}], 3]$$

$$\{0.117, 0.411, 0.706, 0.891, 0.970, 0.994, 0.999, 1.00, 1.00, 1.00\}$$

となることがわかる。

ともかく、先のド・メレの問題にしてもこの誕生日問題にしてもわれわれの直観とはややかけ離れている話題である。日常的にごく単純な不確実な状況に直面したとき、確率計算を知っていれば正しく対応できるかもしれない。

II：確率モデル

1 現実の世界と数学の世界を結ぶもの

線分を取り上げると、数学的定義では「幅をもたず長さをもつもの」であるのに対し、現実の世界で、チョークで黒板に「線分」を書いたとしても現実には「幅」をもってしまふ。ただ、より細いペンでかけばだんだん理想に近づく。このように現実の図形は数学での幾何学をモデルとして考えることは有効である。また、さまざま自然現象を微分方程式として記述し解析する手法は有効で、まさに一般に現実の世界をいくつかの仮定を置きながら数学的モデルとして解析していることになる。

2 確率モデル（偶然モデル）

サイコロに話題をもどすと、サイコロを振る時 1 から 6 の目が出る規則性は期待できないと考えることが妥当である。しかし、偶然のできごとでも、前にも述べたように 60 回投げれば 10 回程度 6 の目が出ると期待することは自然である（感覚的に）。そして確率論はこの偶然性を計算し、現実の世界の問題解決のための橋渡しをするモデルをつくる学問といっても過言ではない。であるから、サイコロを投げる現実世界に対し、サイコロはどの目も同様に出る（当確率）ものと仮定し、投げる人も投げ方にくせがないなど、理想的な状態で話を展開することは意味あることである。

しかし、本当にモデル（理論）どおりサイコロ（現実）は振る舞うのだろうか？これは非常に難しい話である。もう一つ重要なことは、このモデル化に際して、サイコロの結果をはっきり定めておくことである。この場合、1 から 6 までの目しかでない。それも同様に確からしくと定めることが重要である。昔、靴をほおり投げて明日の天気を占った経験があると思うが、これも表と裏のみの結果と定め晴れと雨の 2 つの現象とするか、表と裏と横（曇り）の 3 通りの結果を考えるかはモデルの作り

かたの違いで、確率の計算に本質的に影響する。

Ⅲ 数学的確率とは

確率とは、「その出来事の起こりやすさの程度」であるが、古典的な定義はラプラスによる次の定義が一般的である。いま同様に確からしい N 個の相異なる場合があり、求めたい事象 E の場合が n 個である時、事象 E の確率 $P(E)$ を

$$P(E) = \frac{n}{N}$$

と定義する。（ n, N は自然数. $n \leq N$ ）

1 変数の離散的な扱いは、これで基本的にことが足りる。しかし、重要なことは、何をもって「同様に確からしい」とするのかをはっきりさせないと、この定義式が意味不明になる。しかし、同様に確からしさを真剣に議論しても大変なので、数学では割り切って「妥当」なものを仮定して（コインを投げるときは、裏と表しかでなく、立ったりしない）モデル化することである。そして、標本となる空間（同様に確からしいすべての場合）を定めて、該当の場合を漏れなく数え上げることが重要になる。

【大数の法則】

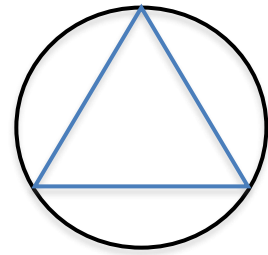
1 回、1 回の試みでは E が起こるか起こらないかは何とも言えないが、長い試行を繰り返すと、その起こる割合は一定の値に近づく。

例 1：2 枚のコインを投げる場合、2 枚とも表がでる確率

モデル化 → コインは裏と表が同様に確からしく出る。

標本空間 = {表・表, 表・裏, 裏・表, 裏・裏}

該当事象 = {表・表}



例 2：Bertrand のパラドックス：

ある円に任意に弦を引くとき、その長さが内接正三角形の一边より長くなる確率を求めよ。

○A さんの答：

弦を直径に垂直に引く。すると、弦と直径の交点の位置によって弦の長さが定まる。よって、弦の長さが内接する正三角形の一边より長くなる確率は $1/2$ である。

○B さんの答：

弦は円周上の 2 点で定まる。そこで、三角形の頂点を一つ固定し、もう一点 P を円周上にとり弦を引く。 P を円周上で動かすとき、弦の長さが内接する正三角形の一边より長くなる確率は $1/3$ である。

○C さんの答：

円内の一点に対しその点を中点とする弦を定める。すると、弦の長さが内接する正三角形の一边より長くなる場合は、元の円の半径の $1/2$ の同心円内であるので確率は $1/4$ である。

例 3：モンティ・ホール問題

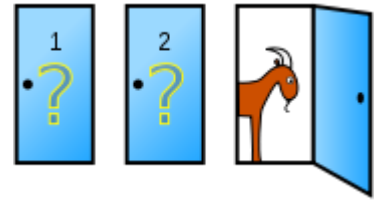
モンティ・ホールという司会者が務めるアメリカのゲームショー番組での出来事である。

「プレイヤーの前に閉まった 3 つのドアがあり、1 つのドアの後ろには景品の新車が、2 つのドアの後ろには、はずれである山羊がいる。プレイヤーは新車のドアを当てると新車がもらえる。

さて、プレイヤーが 1 つのドアを選択した後、司会者モンティは残りのドアのうち山羊がいるドアを開けてヤギを見せる。ここでプレイヤーは、最初に選んだドアから残っている開けられていないドアに変更してもよいと言われる。さて、プレイヤーは選んだドアを変更すべきだろうか？」

【ルール】

- ・プレイヤーはドアを1つ選ぶ.
- ・モンティは残りのドアのうち1つを必ず開ける.
- ・モンティが開けるドアは、必ず山羊の入っているドアである.



○Aさんの答（変更しない）

そもそも新車を得る確率は $1/3$ であり、司会者がドアを開き、山羊が出てきたときには、2つ開いていないドアがあり、一つには新車、他方には山羊がいるのだから、変えようと変えまいが、新車を得る確率は同じなので変更する必要はない.

○Bさんの答（変更する）

新車を得る確率は $1/3$ であるが、変更しなければそのまま $1/3$ であるので、変更すれば $2/3$ になる.

問題：例2，例3を考えてみよう.

【参考書】

小針峴宏：確率・統計入門，岩波書店，1973.

金子郁容：「不確実性と情報」入門，岩波セミナーブックス，岩波書店，1990.

竹内啓：偶然とは何か，岩波新書，岩波書店，2010.

ラプラス：確率の哲学的試論，岩波新書，岩波書店，1997.

小島順，武沢護：Mathematica その無限の可能性・応用編，実教出版，2001.

第 8 回 確率の指導について②

確率の計算とシミュレーション

◎数学の解について・・・厳密解と近似解（数値解，シミュレーションなど）

【問題】 30 人のクラスで席替えをします．クラス全員が席替えの前の座席と違うことは，どのくらいの割合で起こるでしょうか？

【手計算による解法】

I 2 人の場合

○座り方の総数

○異なる座り方の場合の数

全員が前の座席と異なる確率

II 3 人の場合

○座り方の総数

○異なる座り方の場合の数

全員が前の座席と異なる確率

III 4 人の場合

○座り方の総数

○異なる座り方の場合の数

全員が前の座席と異なる確率

★こんな調子では 5 人，6 人・・・30 人は非常にキビシイ

【ハンドシミュレーションによる解法】・・・実験で数学の解答に迫る.

5 人分のシミュレーションを 5 枚のカードでやってみよう.

5 枚の番号がすべて異なっていた時には○, 一つでも同じ番号があったら×をつけよう.

回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	○の数
はじめの 10 回 10											
次の 10 回 20											
次の 10 回 30											

●各ペアの結果

割合（確率）＝ ○の数 ÷ 試行回数＝

●クラス全員分を集計してみると・・・

班	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
○の 数																				
試行 回数																				

割合（確率）＝ ○の数 ÷ 試行回数＝

【シミュレーションとは】・・・こんないい加減な方法でいいのかな.

シミュレーションという方法は, 現代ではおもにコンピュータを用いたものが多い. 数学的には厳密ではありませんが, 数学的に解こうとすると非常に難しい問題をこのようにシミュレーションで「近似解」を求めることがある. この方法は現代社会の複雑な問題の解法には大きな威力を発揮している.

【席替え問題のシミュレーションの補足】

席替え問題は確率の「モンモール問題」(完全順列)として知られ、回数 a_n の関係式が次のように再帰的に定義できる.

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad (n=3, 4, 5, \dots) \quad \dots (A)$$

解説: 番号1を固定して考える. まず, 番号1が番号2に移る場合を考える.

1	2	3	4	……	n	a_n 総数	
2	1	3	4	……	n	a_{n-2}	(2が旧1の位置に動く場合)
2	1	3	4	……	n	a_{n-1}	(2が旧1以外の場所に動く場合)

番号1が移るのは, 2以外にも $n-1$ 通りあるので,

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$$

が成立する.

さらに, 求める割合(確率) $P(n)$ は, すべての場合が $n!$ であるので

$$P(n) = \frac{a_n}{n!}, \quad P(2) = \frac{1}{2}, \quad P(1) = 0$$

となり, A式は,

$$P(n) = \frac{n-1}{n}P(n-1) + \frac{1}{n}P(n-2)$$

と変形できる. さらに,

$$P(n) - P(n-1) = -\frac{1}{n}(P(n-1) - P(n-2))$$

$$P(n) - P(n-1) = (-1)^{n-2} \frac{1}{n!}$$

$$P(n) = P(1) + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-2} \frac{1}{k!}$$

$$P(n) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots - \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \quad \dots (B)$$

となる. n を大きくすることで,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = e^{-1} = 0.367879 \dots \quad (e \text{ は自然対数の底})$$

に限りなく近づくことが知られている. これは, 指数関数 e^x のテーラー展開

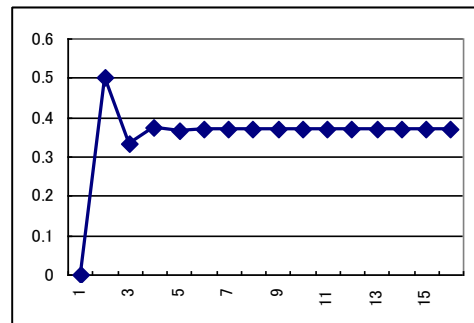
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$$

を利用している. こんなところに自然対数の底が出現するとは不思議だ.

【コンピュータによる解法】

表計算ソフトウェアで次のような表を作成して計算することもできる。

回数 n	場合の数 a(n)	総数 n!	確率 P(n)
1	0	1	0
2	1	2	0.5
3	2	6	0.3333333333
4	9	24	0.375
5	44	120	0.3666666667
6	265	720	0.3680555556
7	1854	5040	0.367857143
8	14833	40320	0.367881944
9	133496	362880	0.367879189
10	1334961	3628800	0.367879464
11	14684570	39916800	0.367879439
12	176214841	4.79E+08	0.367879441
13	2290792932	6.23E+09	0.367879441
14	32071101049	8.72E+10	0.367879441
15	4.81067E+11	1.31E+12	0.367879441
16	7.69706E+12	2.09E+13	0.367879441



*左の表のセルにおいて、場合の数 a(n)や総数 n!の欄には再帰的な関数式を入力してある。

問：表計算ソフトを用いたコンピュータシミュレーションによる解法を考えてみよう。

(ICT 教材の作成)

第 9, 10 回 統計の指導について

I 統計教育の重要性について

初等中等教育における数学教育のなかで統計分野は必ずしも重点的に取り上げられてこなかった。例えば大学入試では出題されることが少なく、そのために高等学校では教えられることが少ない現状があった。しかし大学入学後は、自然科学のみならず社会科学を問わず統計的な見方や考え方は重要であることは言うまでもない。この分野は社会の変化や学校教育へのコンピュータの普及などにともなって、わが国の数学教育のカリキュラムの重要な課題になってきた。特に、次期学習指導要領（2018 年告示，2022 年実施）では数学 I，数学 B において相当な程度，統計が扱われるようになった。

II 統計の歴史と学問的意義 (Statistics)

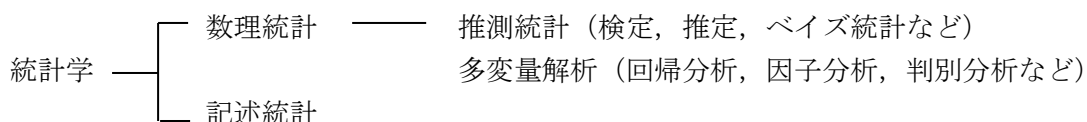
統計の歴史は遡れば紀元前や17世紀ともいわれ、もともとStatisticsは国を意味するラテン語のStatus，政治家を意味するイタリア語のStatista，英語のStatist，そして国家あるいはコミュニティに関する政治学に用いた言葉として扱われたといわれるドイツ語のStatistikからの由来と言われる。わが国では明治維新後，形勢，国勢，政表，統計という訳語が候補となり，最終的に「統計」に落ち着いたと言われる。このように統計は「国勢を数字で調べて比較する学問」として発達してきた。

数理科学的には20世紀のピアソン（1857-1936），フィッシャー（1890-1962）からである。そして確率論の進展とともに，従来の決定論的世界観から確率論的世界観への視点が見えてきた。

統計は「偶然的事象の中に埋もれている必然性・合法則性、そしてケトレー（1796-1874）のいう攪乱的原因の結果たる非類型的現象の背後に隠蔽されている本質を発見すること」（経済学者：有沢広巳）というように，統計学はケトレーの確率に基づいた「大数の法則」につながるもの，社会統計学そして数理統計学という流れになる。

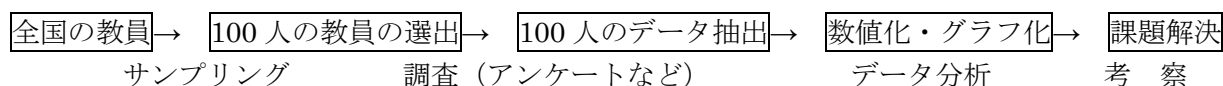
III 統計的手法

1 統計学とは



2 データ分析の手順（意識調査を例に）

データには量的データと質的データがある。まず，量的データについて考える。特に，大量のデータを分析する場合は確率・統計の考え方が有効になる。



【問】次の例を考えてみよう。

例 1：政党支持率などの世論調査において，回答者数はどのくらいの人数で実施されるだろう。

例 2：「1924 年度エール大学卒業生の年間平均所得は 25,111 ドルである」（by タイム誌）

例 3：「新宿区内の IT 企業 500 社の社員の年間平均所得は 830 万円である」

(1) サンプルの重要性・・・統計結果にだまされない

- ・誰に依頼したのか ・何人回答したか ・正確に回答しているのか（見栄を張っていないか）

例：世論操作（意識調査、選挙予想）など→ 層化抽出法、層化ランダムサンプリング、RDD など

(2) 単純に「平均」や「順位」を信用してはいけない

集団の数値的特徴を表す場合、「平均」という概念が一般的であるが、これは必ずしもその集団を特徴づけることにはならない。かえって中央値、最頻値の方が適切になることがある。

分布が「正規分布」であるときは、この3つは同一になるが一般に通常の分布では異なる。これらは意図的に使われることが多い。

(3) 統計のウソを見破るカギ

- ・どのような団体、研究機関の調査か（原発の例では、政府側か市民側か）
- ・調査方法は適切か（サンプリングの適正さや回答率）
- ・数値に信頼性があるのか
 - ・平均の問題点（上述）
 - ・特殊な要因がバイアスになっていないか・・・数値の上昇、下降
 - ・足りないデータはないか・・・相関関係（がんと生活習慣など）

3 集団の数値的特徴を表す代表値

(1) 代表値のいろいろ

平均（average） 中央値（median） 最頻値（mode）

分散（variance） 標準偏差（standard deviation）

<平均のいろいろ>

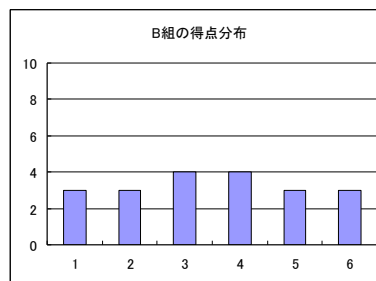
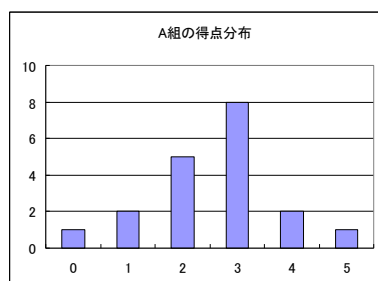
$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n}, \quad \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}, \quad \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

相加平均 相乗平均 調和平均

例：東京から名古屋まで旅行した。行きは平均時速 180km のひかり，帰りは平均時速 120km のこだまを利用した。往復の平均時速はいくらか。 (あ) 144km (い) 150km (う) 160km

(2) 散らばり具合は？（同じ平均でも）

単なる平均だけでなくその分布の散らばり具合を数値で示すものが、「分散」，「標準偏差」である。いわゆる「偏差値」の計算の元になるものである。



この違いをどう数値化するか（同じ平均点として）

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ を各データ， m をその平均とすると，次の式で定義する．

$$v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2, \quad \bar{v} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2, \quad \sigma = \sqrt{\bar{v}}$$

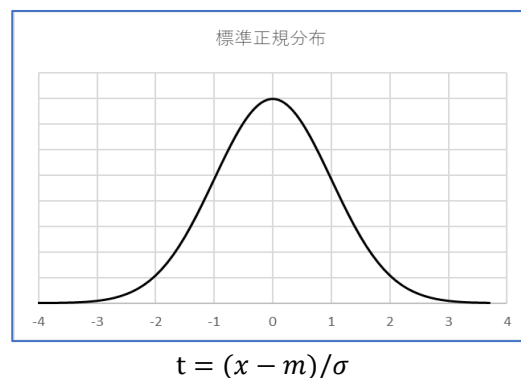
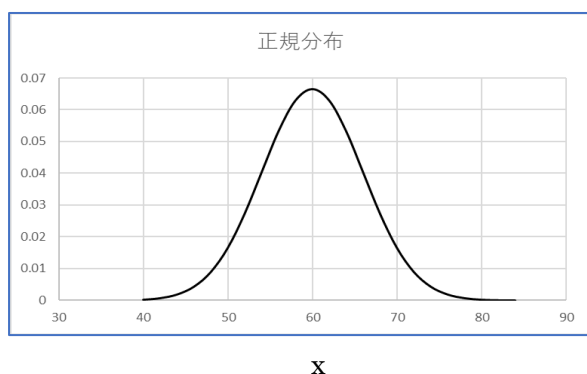
分散

不偏分散

標準偏差

【問】分散（標準偏差）の定義式の意味は？ なぜ，不偏分散を考えるのか？

【変数の標準化】 $m=60$ ， $\sigma=6$ の時：



【偏差値の計算】

$$\text{偏差値} = \frac{x - m}{\sigma} \times 10 + 50$$

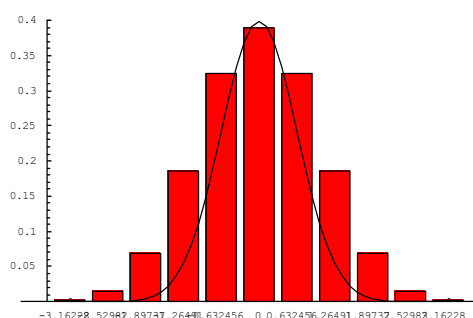
と計算する． x はその人の点数．この数値が意味をもつのは分布が正規分布の時である．

練習：平均点が 55 点，標準偏差が 7 点の時，72 点の偏差値を求めなさい．

4 確率分布（代表的な分布）

（1）正規分布（normal distribution）

偶然性が高い大量なデータ（身長，体重や大学入試センターテストなど）の分布．



・ 平均= m ：グラフ中央

・ 標準偏差= σ ：

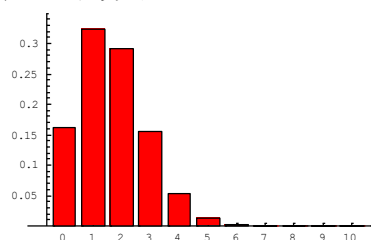
$m - \sigma < x < m + \sigma$ 約 68%

$m - 2\sigma < x < m + 2\sigma$ 約 95%

$m - 3\sigma < x < m + 3\sigma$ 約 99%

練習：30 万人受験した英語のセンターテストで，偏差値 70 だった人は上位 2.5%と考えることができるので上位 7500 番程度であると判断する．では偏差値 80 の人は上位何番程度と判断できるか．

(2) 二項分布

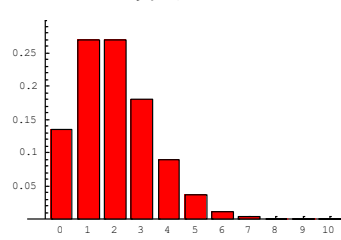


サイコロ投げや

うな互いに

独立な事象を複数回行うときの分布.

(3) ポアソン分布



硬貨投げのよ

一つひとつの事象がめったに起こらない

ものの分布. (窓口の行列など)

【数学実験】

正規分布を実感しよう。(別紙 ワークシート)

10 cmのテープを 30 枚切る作業をとおして, 正規分布の謎に迫る.

(次回はハサミを持参してください.)

5 なぜ, 正規分布が重要なのか.

いろいろな分布の中で, 正規分布がなぜ重要かという点, 日常的な現象のなかでいろいろなところに出現するからである. 偶然性が高い大量なデータ (身長, 体重や大学入試センターテストなど) や複雑な原因で生じるばらつき (誤差) などの分布になることが知られている. そこでは, 「中心極限定理」というものが強力に働くからである.

定義: 確率密度関数 $f(x)$ として,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

で定義される分布を, 平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布といい, $N(\mu, \sigma^2)$ で表す.

定理 (中心極限定理): 確率変数 $x_1, \dots, x_n$ が互いに独立に同一の確率分布に従うとき, その平均, 分散をそれぞれ平均 μ , 分散 σ^2 とするとき, $x_1, \dots, x_n$ の平均, すなわち,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

の確率分布は n が十分大きい場合, 正規分布

$$N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

となる.

これは, 要するにある測定において, たくさん計測してその平均をとると標準偏差がだんだん小さくなる, すなわち精度のよい測定値が得られるということである.

しかも, もとの確率変数がどんな分布でも正規分布に近づくのだから強力な定理である.

世の中に正規分布をよく見かけるのは, この中心極限定理がその根拠となっている.

そして, 正規分布から派生する χ^2 分布, t 分布が検定や推定の基礎となる.

6 検定と推定の考え方

統計の難しい計算はともかく、統計の非常に有効な考え方に検定と推定がある。この基本的な考え方は、一を調べて十を知ることである。すなわち、あるデータ（標本）が与えられた時、そこから全体集団（母集団）の様子をある幅をもって推測したり、そのデータから創り出した仮説が正しいか、正しくないかを検定したりすることを、確率や確率分布の知識を用いて行うことである。以下では、母集団は正規分布に従うものとして話を進める。（例：PISA 調査）

(1) 検定の例

例：コインを 100 回投げ続けたとき、60 回表が出たという。このコインは正常なコインといえるか。
(解説) 帰無仮説「正常である確率 0.5」という仮説を立てて検定することになる。一定の計算の結果として有意水準 5% で仮説は棄却される（つまり、正常とはいえないサイコロと判断する）。

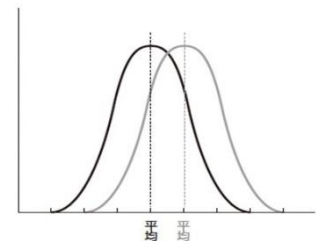
(2) 平均の差の検定（2 変量の平均の検定として）

平均の差の検定は、2 変量では t 検定、3 変量では分散分析で行う。

「対応のある t 検定」・・・独立した 2 群の比較

「対応のない t 検定」・・・同一群での事前・事後などの比較

「等分散」と「分散が等しくない」でも分析が異なる。



例 1（対応のない t 検定）：

A 組は伝統的な授業を、B 組は ICT を用いた授業を実施し、試験を実施した。その結果、

$A = \{40, 50, 60, 50, 70, 70, 30, 20, 20, 10\}$ $B = \{60, 60, 70, 90, 40, 90, 70, 80, 80, 60\}$

という結果が出た。この 2 組の平均に差（統計的に）はあると言えるか（ICT に効果はあるか）。

例 2：（対応のある t 検定）

10 名に対して ICT を用いた数学の授業前と、授業後で数学の試験を実施した。

Before = {60, 50, 60, 30, 40, 30, 40, 50, 40, 50} After = {80, 90, 90, 50, 60, 60, 70, 80, 60, 70}

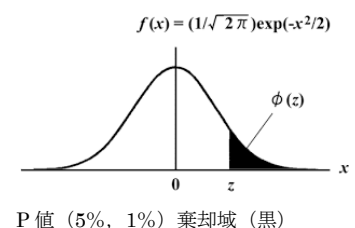
授業前後（平均点 45 点から 62 点）で成績は伸びたと言えるか（ICT は効果があったか）。

(解説) ここでは何としても「効果があった」と結論付けたいとしよう。

しかし効果のない授業でも、標本の関係でこのようなことが起こり得る。しかし、確率的にこのような事象が起こる確率が低いことを示すことができれば、ある程度の合理的な説得力をもつことになる。この手順が仮説検定法である。

< 仮説検定法の手順 >

- 1 本来主張したい仮説でない方を帰無仮説として設定する (cf 対立仮説)
- 2 有意水準 (5%, 1%) を設定する
- 3 P 値などを計算する (統計解析ソフトなど利用)
- 4 P 値と有意水準の値との大小比較により、
 - ・棄却域に入れば帰無仮説を棄却して対立仮説を採用
 - ・棄却域に入らなければ帰無仮説を棄却しない



この例題の場合、

- 1 帰無仮説「平均に差がない」という仮説を立てて検定する.
 - 2 有意水準を 5% に設定する.
 - 3 表計算ソフトや統計ソフト利用した計算で棄却域に入らないとすると,
 - 4 結果として有意水準 5% で仮説は棄却しない.
- すなわち、この標本では「効果があると (平均に差がある)」とは結論づけられない.

しかし「効果がない (平均に差がない)」とは結論してはいけない. 帰無仮説というのは否定されて初めて意味をもつ仮説なので肯定的に使ってはいけない.

注) 帰無仮説とは (なくした鍵を探す)

帰無仮説: A 駅から自宅までの帰り道ではなくさなかった.

結果: 見つかった (棄却域に入る) → 帰無仮説を棄却

見つからなかった (棄却域に入らない)

→ 帰無仮説を棄却しないが肯定的に使わない (もっとちゃんと探せ!)

(3) 推定の例

例題: ある大学の学生 10 人の体重を計測したところ、次のデータを得た. この大学の学生全体の体重の平均と分散を 90% の信頼率で推定せよ.

(解説) この標本平均: 71.92 標本分散: 10.26 とする.

母分散の推定は、 χ^2 乗分布を用いて、5.4~27.78 と推定できる (信頼率 90%)

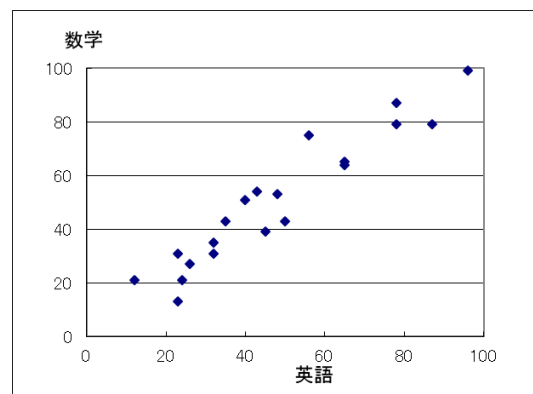
母平均の推定は、t 分布もしくは F 分布を用いて、65.5~74.2 と推定できる (信頼率 95%)

IV: 多変量解析の初歩 (EXCEL を利用)

1 相関関係 (correlation)

一つの変数のデータを分析するだけでなく、複数のデータに関する関係を分析することも有効である.

ここでは、右図のような英語と数学の得点の例に、相関関係をどのように数値化するか見ていこう.



【手順】

- (1) EXCEL で散布図をかく (データの範囲を選択して、挿入→グラフ→散布図を選択)
その後、グラフのレイアウトで色々調整する.

- (2) 正の相関、負の相関、無関係を数値化する. (相関係数: correlation)

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_i - m_y) \quad r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_x)}{\sigma_x} \frac{(y_i - m_y)}{\sigma_y}$$

共分散

相関係数

ただし、 m_x, m_y : x, y の平均, n : 総数, σ_x, σ_y

すると、計算により $-1 \leq r \leq 1$ となることが分かる。(内積に似ている)

r : -1 $\xrightarrow{\hspace{1.5cm}}$ 1

 強い負の相関 弱い負の相関 相関なし 弱い正の相関 強い正の相関

【EXCEL のコマンド】 CORREL(配列 A, 配列 B)

2 回帰分析

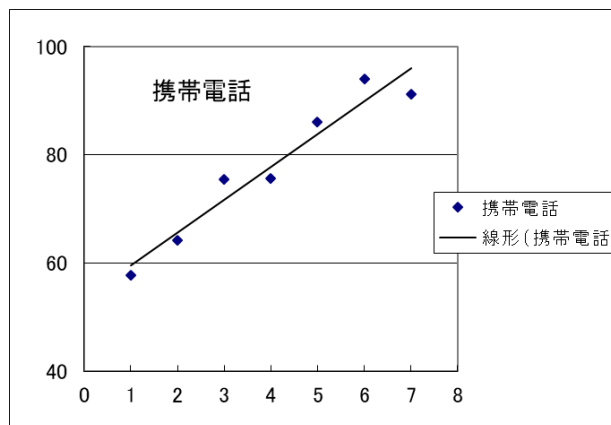
現在のデータをもとにして、将来のデータの予測をすることは社会の中ではよくあることである。ここでは、いくつかのモデルを用いて簡単な予測を試みよう。

- ・ 決定論的因果関係 (微分方程式)
- ・ 非決定論因果関係 (確率的)

決定論的な方法としては、

- ・ 直線で予測する
- ・ 曲線で予測する

この二つが代表的である。



例えば、時間 (説明変数) の変化に伴って、ある値 (目的関数) が変化していく様子を、関数の形で関係づけて分析することを回帰分析 (Regression Methods) という。

【注意】: 回帰分析の使い方

回帰分析は、この例のように説明変数に対する目的変数の変動の予測や、実験などによる 2 つの変量の因果関係を導くときなどに用いられる。

【注意】: 相関関係は必ずしも因果関係を導かない

回帰分析では、いくつかの変量の相関をもとに考えることが多い。その際に注意することは、その変量に相関関係がある場合でも、安易に因果関係を導いてはいけない。

(1) 直線で予測する (回帰直線)

単純な回帰分析は直線で近似する線型回帰である。

【EXCEL でグラフ作成】

範囲を選択して、挿入→グラフ→折れ線グラフを選択。

【近似曲線を追加】

グラフを選択 → 右クリック → 近似曲線の追加

→ 種類 または オプションを選択 (いろいろな近似が選択できる)

(2) 曲線で予測する

(ア) 指数関数で近似 (指数回帰) 急激な増加の予測

人気歌手の CD 売り上げ, 人口増加

(イ) 対数関数で近似 (対数回帰) 頭打ちの場合の予測

一発芸のタレントの人気, 人口増加
(ウ) 多項式で近似 (多項式回帰) 複雑な動きの予測

【統計のソフトウェアについて】

コンピュータを用いて統計処理を行う場合, 専用ソフト (SAS, SPSS など) がある. また, 最近はスプレッドシートのインターフェースをもつ表計算ソフト (EXCEL など) にも高機能な統計関数が用意されている. 統計だけを目的にした場合, Mathematica を使うことは必ずしも効率がいいとは言えないが, Mathematica を用いる一番の利点はおそらく数学の統合的な環境をフルに利用できることである. フリーソフトでは言語「R」が取り組みやすい.

【EXCEL のコマンド】

合計 = **SUM** (A1 : A10) 平均 = **AVERAGE**(A1 : A10)
中央値 = **MEDIAN** (A1 : A10) 最頻値 = **MODE**(A1 : A10)
分散 = **VAR.P** (A1 : A10) or **VAR.S** (A1 : A10) (variance)
標準偏差 = **STDEV.P** (A1 : A10) or **STDEV.S** (A1 : A10) (standard deviation)
相関係数 = **CORREL** (配列 x, 配列 y)

【R のコマンド】

合計 = **sum** (Data) 平均 = **mean**(Data)
中央値 = **median**(Data)
不偏分散 = **var** (Data) (variance)
不偏標準偏差 = **sd** (Data) (standard deviation)
相関係数 = **cor** (Data1, Data2)

【参考書】

- ・ 鈴木義一郎: 統計学で楽しむ, ブルーバックス, 講談社.
- ・ ダレル・ハフ: 統計でウソをつく法, ブルーバックス, 講談社.
- ・ 保江邦夫: EXCEL で学ぶ金融市場予測の科学, ブルーバックス, 講談社.
- ・ 宮川公男: 統計の日本史, 東大出版, 2017.

【夏の課題】読書レポート

出版されている数学の歴史, 数学者の評伝, 数学の話題について書いてある書物の一つを選び, その書評 (感想) を書きなさい。

第 11 回 集合と論理の指導について

【クイズ】（ウェイソンの課題）

下のように 4 枚のカードがある．

「カードの一方の面に母音があれば，その裏側は必ず奇数である」

が正しいことを証明するためには最低どのカードをめくればよいだろうか．



さて，数学教育の目的の一つに「論理的思考力」の育成がある．新学習指導要領の言葉を借りれば「数学を活用して事象を論理的に考察する力」を育成することである．また，一方で若者が身に付けるべき能力の上位なものとして，「コミュニケーション能力」と並んで「論理的な思考力（Logical Thinking）」が挙げられる．プログラミング教育においてもこの「論理的思考力」は重要視される．では，この「論理的に思考すること」とはどういうことなのだろう．そもそも「考える」「思考する」とことは人間のどのような営みだろう．おそらくそれは，人間が問題の解決を求める「探究」のことを指し，その「探究」がたどる過程，規則そして条件を考察する学問が「論理学」といえる．歴史的には中国やインドにもあったようだが，古代ギリシアに盛んになり，アリストテレスが系統的に論じたと言われる．その後，中世の学者たちに引き継がれ，中世の大学では非常に重要視され，19 世紀において数学的論理学（記号論理学）として近代化され，数学基礎論として確立する．

例：リベラル・アーツ（Liberal Arts）とは・・・（中世ヨーロッパの大学）自由七科

・論理学＋修辞学＋文法（trivium）

・算術＋幾何＋天文学＋音楽（quadrivium）

→ 現代の大学では「一般教養」

I：数学の揺らぎ（数学基礎論の誕生）

そもそも数学はギリシア時代から「真理」の探究，厳密な学問と言われてきた．ユークリッド幾何学に代表される数学は，公理・公準を設定し命題を証明する．この厳密な学問がパスカルの言う「幾何学的精神」ということになる．しかし，19 世紀に起こった数学的出来事はこの真理の典型であった幾何学から起こった．それは，ユークリッド幾何学の五つの公準がターゲットになった．

1．任意の点より任意の点まで直線をひき得る．

2．直線は延長できる．

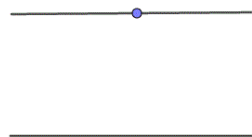
3．任意の中心，任意の半径にて円をひき得る．

4．直角は相等しい．

5．一つの直線が二つの直線と交わって，同じ側に合わせて二直角よりも

小さい内角を作るとき，その二直線は，それを限りなく延長すれば，その内角のある側において相交わる．

のちの人々は，この第 5 番目のみが長いので，他の公理・公準から導けるのではないかと思い，次の内容を同じであることを発見した．



「1 点 P を通って、この点 P を通らない直線に平行な直線は 1 本しか引けない」 (*)

そしてこの公理は「平行線の公理」と呼ばれた。

しかし、ロシアの数学者ロバチェフスキー (1793-1856) とハンガリーの数学者ボリアイ (1802-1860) が独立に、

「1 点 P を通って、この点 P を通らない直線と交わらない直線を無数に引くことができる」 (**) という公理 (約束) をしてもまったく矛盾のない幾何学 (双曲幾何学・負の曲率をもつ世界) を展開できることを示した (ボリアイ・ロバチェフスキー幾何学)。

さらに、ドイツの数学者リーマン (1826-1866) は、

「1 点 P を通って、この点 P を通らない直線と交わらない直線を引くことはできない」 (***) を採用してもやはり矛盾のない幾何学 (楕円幾何学・正の曲率をもつ世界) を展開できることを示した。これらを総称して「非ユークリッド幾何学」と呼んでいる。

これらの出来事は、いままで「絶対的真」と思われてきた幾何学の公理さえもその真偽が揺らいできた証拠であった。すなわち「自明の理」というものの存在自体を疑わざるを得なくなってきた。

そこで登場したのがドイツの数学者ヒルベルト (1862-1943) である。彼は、

「数学は、現象世界との対応における真理性を追究するものではない。それはただ単に‘矛盾を生じない’という条件のみを要求された仮定から形式的に結論を導いていく抽象的理論の建設をもって責務として、それ以外の何物でもない。」

として、「幾何学基礎論」を著し、数学という学問は「公理」から組み立てるものという立場をとった。この立場は「公理主義」または「形式主義」と呼ばれる。

この公理主義は現代数学に基本的立場であり数学界の主流の思想である。しかし、この思想に反旗を翻したのが、イギリスの数学者ラッセル (1872-1970) とオランダの数学者ブラウワー (1881-1966) である。

ラッセルはヒルベルトの公理主義は数学から内容を捨て去り無味乾燥な学問にしてしまうことを攻撃した。例えばペアノの公理によって導入される「自然数」というものは公理に無矛盾であればいいというものではなく、それによって「ものを数えることができる」ものでなくてはならず、数学の概念は論理学の用語から定義可能であるという立場をとった。この立場を「論理主義」という。

また、ブラウワーは「直観主義」と言われ、数学の対象は構成されるべきという立場をとる。この立場の人々は「排中律」を認めない。

そして、そもそも「数学とは何か」、「真理とは」ということを探究する数学の分野である「数学基礎論」が登場する。具体的には、ピュタゴラスやゼノンらギリシア時代からの懸案だった実数を構成的に体系づけ、実数のいろいろな性質を公理として仮定し、それから実数の性質についての多くの定理を証明する。そしてカントールの集合論により、実数の基礎付けも集合論の公理を用いた基礎付けに還元される。いずれにせよ、ヒルベルトの公理主義の貢献が数学の世界には大きく、幾何学だけでなく、代数学の公理主義による代数学の再編成 (群・環・体など) や実数の概念構成や自然数の公理化に寄与した。

II：集合と論理の歴史（数学基礎論の登場）

1 さまざまな論理

- ・ 古典論理（絶対者によって真偽が決定される）
- ・ 直観論理（ブラウワー）
- ・ 形式論理（ヒルベルト）
- ・ 量子論理

2 カントールの集合論（Georg Cantor 1845－1918）

ゲオルク・フェルディナント・ルートヴィッヒ・フィリップ・カントール（Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845- 1918）はロシアのサンクト・ペテルブルク生まれのドイツで活躍した数学者である。父はカトリック教徒のゲオルク・ボルデマー・カントール、母は音楽家の家系のマリア・アンナである。従来の集合論に矛盾を発見し、現代的な集合論を確立した。自然数と実数の間に全単射が存在しないことを対角線論法によって示す一方、 $\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}^n$ の間に全単射が存在することを証明した。連続体仮説に興味を持ち研究を続けたが、存命中に成果は得られなかった。連続体仮説については、後にゲーデルとポール・コーエンの結果によって一応の解決をみている。ライプツィヒ近郊のハレ大学で教えていたが、当時より神経症を患っていたため一流大学の教壇に着くことは出来なかった。晩年、次第に精神を病み、最後はハレのサナトリウムでこの世を去った。

3 ゲーデルの不完全性定理（Kurt Gödel, 1906-1978）

クルト・ゲーデルは、オーストリア・ハンガリー二重帝国（現チェコ）のブルノ生まれの数学者・論理学者である。業績には、完全性定理及び不完全性定理、連続体仮説に関する研究が知られる。ゲーデルの不完全性定理は一言でいうと、

「いかなる知識にせよ、体系づけられた知識には必ず限界がある。すなわち、その体系の中で実現される問題で、その体系の中では真偽が判定できないものが存在する」
というもので、数学の公理系の限界を証明した。

III：集合と論理

[I]：命題（集合）・・・命題論理

(0) 命題の定義

ある文 P が命題であるとは、その文の真偽がはっきりしている時のことをさす。

（命題）平塚市は大磯町に隣接している

（命題でない）大磯町は平塚市より住みやすい

(1) 命題の合成（接続詞）

接続詞はいろいろあるが、ここでは基本的な“または(or)”，“かつ(and)”～でない(not)”～ならば(if)”のみ限定して、そして各々 $\wedge$ ， $\vee$ ， $\neg$ ， $\Rightarrow$ と表す。そこで、まず and, or, not, if を数学的に定義する。その際、命題が真であれば 1，偽であれば 0 と書くことにする。

① 否定： $\neg A$ （補集合 A^c ）

[論理回路]

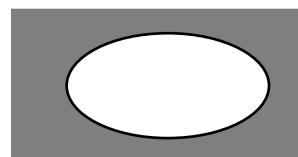
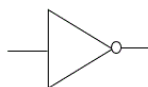
[集合として]

$A \quad \neg A$

1 0

0 1

と定義する。



② または： $A \vee B$ （結び $A \cup B$ ）

A	B	$A \vee B$	[論理計算]
1	1	1	$1 + 1 = 1$
1	0	1	$1 + 0 = 1$
0	1	1	$0 + 1 = 1$
0	0	0	$0 + 0 = 0$

と定義する.

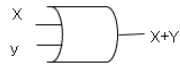
[日常の会話]

A：“英語を勉強する” B：“数学を勉強する”とすると，

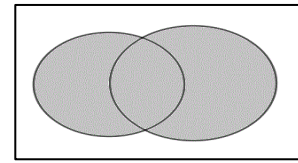
$A \vee B$ は“英語か数学を勉強する”という文章は両方ともしない以外は真.

[論理回路]

並列回路



[集合として]



③ かつ： $A \wedge B$ （交わり $A \cap B$ ）

A	B	$A \wedge B$	[論理計算]
1	1	1	$1 \times 1 = 1$
1	0	0	$1 \times 0 = 0$
0	1	0	$0 \times 1 = 0$
0	0	0	$0 \times 0 = 0$

と定義する.

[日常の会話]

A：“英語を勉強する” B：“数学を勉強する”とすると，

$A \wedge B$ は“英語も数学を勉強する”という文章は片方でもしないとは偽.

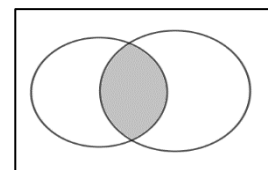
※このような論理計算をブール代数という.

[論理回路]

直列回路



[集合として]



④ ならば： $A \Rightarrow B$ （部分集合 $A \subseteq B$ ）

A	B	$A \Rightarrow B = \neg A \vee B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

と定義する.

[日常の会話]

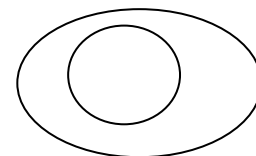
A：“100 円もらう” B：“数学を勉強する”とすると，

$A \Rightarrow B$ は“100 円もらえば数学やる”という文章を真とすると，

“100 円もらったのに数学やらない”のみ偽で，

“100 円もらわなければ，数学やろうとやるまいが”真という訳.

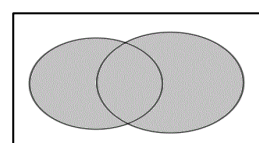
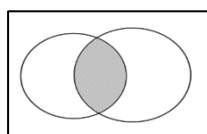
[集合として]



⑤ ド・モルガンの法則

・公式（論理） $\neg (P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$ $\neg (P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$

・公式（集合） $\neg (P \cap Q) = \neg P \cup \neg Q$ $\neg (P \cup Q) = \neg P \cap \neg Q$



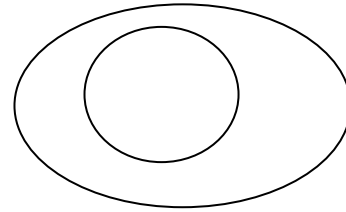
⑥ 再び「ならば ($A \Rightarrow B$)」について

ア：命題と集合の関係について

命題 P , 命題 Q に対して集合 A , 集合 B とすると,

$$P \Rightarrow Q \quad \text{は} \quad A \subseteq B$$

と関連している.



イ：必要条件, 十分条件

$P \Rightarrow Q$ が成立するとき P は Q であるための十分条件

Q は P であるための必要条件 という.

$P \Leftrightarrow Q$ が成立するとき P と Q は互いに必要十分条件 または 同値 という.

ウ：推論規則 ($P \Rightarrow Q$)

$$P \Rightarrow Q$$

$$\text{逆: } Q \Rightarrow P$$

$$\text{裏: } \neg P \Rightarrow \neg Q$$

$$\text{対偶: } \neg Q \Rightarrow \neg P$$

※対偶その命題と真偽をともしする

例：「怒られないと勉強しない」の対偶は？

(3) 証明とは

証明は以上の論理的な言葉の列（公理，命題，推論規則など）により構成し矛盾を生じないようにすることである. また，直接的でないもののほか，間接的証明と呼ばれるものとして次のものがある.

(ア) 反例をあげる

(イ) 対偶を証明

(ウ) 背理法を用いる（排中律）

練習 1： x, y が実数, n が整数とする. 次の命題に対し対偶を用いて証明しなさい.

(1) $x+y>0$ ならば $x>0$ または $y>0$.

(2) n^2 が 3 の倍数でなければ, n は 3 の倍数ではない.

(3) 2 つの整数の積が 3 の倍数であるならば, その整数の少なくとも一方は 3 の倍数である.

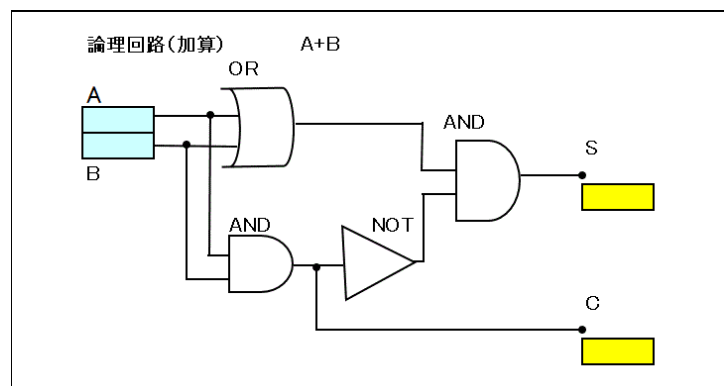
練習 2： $\sqrt{2}$ が無理数であることを背理法を用いて証明しなさい.

練習 3： a, b が無理数のとき, a^b が有理数となることがあるか.

練習 4： 論理回路（加算器）

次の真理表を完成させなさい.

A	B	C	S
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		



[II] 述語（性質）・・・・述語論理

1 命題の記号化

例えば、「 x は素数である」という文を $P(x)$ とかき、真を 1, 偽を 0 とすると,

$$P : x \rightarrow P(x)$$

は $\{0, 1\}$ の値をとる関数となる. これを「命題関数」と呼ぶ.

例えば, $P(1) = 0, P(3) = 1$

つまり, $P(x)$ は“ x は P である”と読むことができ, x が主語, P が述語のようにになっている. このような意味でこの $P()$, つまり変数を代入して初めて命題になるものを数学でも述語と呼ぶ. 述語は性質 (property) とも呼ばれる.

【述語の例】:

「 x は有理数である」 「 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 」

しかし, 同じ $ax^2 + bx + c = 0$ という述語をとってきてもこの式が

「すべての x について成立するのか」

「ある x について成立するのか」

では全く違う.

例: 数学上のいろいろな等号

$$1 \quad x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$$

$$2 \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$3 \quad f(x) = x^2 - 3x - 4$$

$$4 \quad x = 4$$

命題論理では, 文と文のつながり (接続) を考えたのに対し, ここの述語論理では各文の構造を明確にする. すなわち, 「すべて」や「ある」というものを考える. 記号として「すべて」を $\forall$, 「ある」を $\exists$ で表す. すなわち, これからは $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$ に加えて $\forall, \exists$ を含めた命題を考えていく.

$\forall x, P(x)$: すべての x に対して P が成立

$\exists x, P(x)$: ある x に対して P が成立 と読む.

2 否定

$$\neg \text{「}\exists x, P(x)\text{」} = \forall x, \neg P(x)$$

$$\neg \text{「}\forall x, P(x)\text{」} = \exists x, \neg P(x)$$

が成り立つ.

例: 「ある実数 x に対して, $x^2 - 3x - 4 > 0$ である」の否定は,

「すべての x に対して, $x^2 - 3x - 4 \leq 0$ である」

3 「ならば」の否定

「 $x > 3 \Rightarrow x > 1$ 」という命題は, 「 $\forall x, x > 3 \Rightarrow x > 1$ 」という意味で使う. よって,

「 $x > 3 \Rightarrow x > 1$ 」の否定は, 論理計算によると,

$$\neg \text{「}\forall x, x > 3 \Rightarrow x > 1\text{」}$$

$$= \neg \text{「}\forall x, \neg (x > 3) \vee (x > 1)\text{」}$$

$$\begin{aligned}
&= \exists x, \neg (\neg (x > 3) \vee (x > 1)) \\
&= \exists x, \neg \neg (x > 3) \wedge \neg (x > 1) \\
&= \exists x, (x > 3) \wedge (x \leq 1)
\end{aligned}$$

となるので、「ある実数 x に対して、 $x > 3$ かつ $x \leq 1$ 」が求める否定になる。

もう少し、こなれた日本語にするならば、「 $x > 3$ なのに $x \leq 1$ となる数がある」

練習 1：「まだ全員発見されていません」の否定は？

練習 2：2 つの関数 $f(x) = x^2 - 4x + 6$ と $g(x) = -x^2 + 2ax + 2a - 6$ とする。このとき、次の場合の実数 a の値の範囲を求めなさい。

- (1) どんな実数 x に対しても、 $g(x) < c < f(x)$ が成立するような x に関係して定まる定数 c がとれる。
- (2) どんな実数 x に対しても、 $g(x) < c < f(x)$ が成立するような x に無関係な定数 c がとれる。

IV：推論（演繹法、帰納法、仮説的推論法）

1 演繹法と帰納法

我々が物事を説明したり推理したりするとき行う思考法は大別すると 2 種類ある。それは演繹法と帰納法と呼ばれるもので、これらは特に文学部哲学科の学生や数学科の基礎論専攻の学生たちが好んで研究している。演繹的考え方はギリシア哲学からスコラ哲学（例：三段論法）の流れを汲み、帰納的考え方はイギリス経験主義のフランシス・ベーコン（1561-1626）あたりが源流である。

しかし、これらの思考法はみんながすでに体得しているものであり、特別目新しいものではない。

○演繹法（Deduction）とは

「既知の真理から、ある一定の推論をもって未知の真理を導くもの」であり、普遍的な前提から、より個別的・特殊な結論を得る推論方法である。演繹では前提を認めるなら絶対的・必然的に正しい。しかし、前提が間違っていたり適切でない場合、誤った結論が導き出されることがある。

○帰納法（Induction）

「個々の経験的な事実から、より普遍的な真理を導こうとするもの」推論方法のこと。帰納においては前提が真であるからといって結論が真であることは保証されない。

例）演繹法

・すべての哺乳類は乳をのむ ・すべての人間の赤ちゃんは哺乳類	➡	ゆえに すべての赤ちゃんは乳をのむ
---	---	----------------------

例）帰納法

・今まで見た人間の赤ちゃんは すべて乳を飲んでいて	➡	ゆえに すべての赤ちゃんは乳をのむ（だろう）
---	---	---------------------------

演繹法では、仮定が正しければ結論も正しい。それに対して帰納法では結論に至るまでの過程に厳密さが欠ける。しかし、今までの科学がそうであったように「個々のデータからある法則を推測する」方法は新しい科学の発展に欠かすことのできぬものである。ある科学法則の発見において『帰納的に仮説を打ち立て、演繹的に検証する』ことはしばしばである。

2 数学的帰納法 vs 帰納法

数学的帰納法は、前述の帰納法とは違い、こちらは数学的に厳密である。すでに学習したように数学的帰納法の手順は三段階になっており、おもな手法は論理学の帰納法に似てはいるが、第二段階では演繹的に推論する。

数学的帰納法（自然数に関する無限回の命題を有限回の手順で処理するもの）

自然数 n に関する命題 $P(n)$ が与えられていて、

I $P(1)$ が成立する. ($P(n)$ が $n=1$ で成立)

II $P(k) : \text{成立} \rightarrow P(k+1) : \text{成立}$ (for each $k \in \mathbb{N}$)

が証明できたとすると、

III すべての自然数 n に対して、 $P(n)$ が成立する

と結論できるというもの。

(注) 分かりにくいところは、おそらく II にあると思うけれど、II の意味は、

実際 $P(k)$ が成立しているかどうかわからないけれど、もし成立したと仮定して正しさをみる。つまり、II では $P(k) : \text{成立} \cdot \text{不成立}$ に関係なく単に「推論の正しさ」のみに着目する。

練習 1：次の不等式を証明せよ。

$$(1) 2^n > n \quad (\text{for } \forall n \in \mathbb{N})$$

$$(2) 2^n > n^2 \quad (\text{for } n \geq 5 \quad n \in \mathbb{N})$$

3 仮説的推論法 (Abduction)

一連の観察された事象に対して、最もよくその事象を説明する仮説を選択する推論法。観察された事象の集合から出発し、それらの事象についての最良の説明へと推論する。科学的理論の構築に使われることが多い。これはアメリカの哲学者、数学者であったチャールズ・S・パース (Charles Sanders Peirce, 1839-1914) らによって提唱された。

例：ケプラーの法則

ケプラーは火星がいくつかの地点を通るデータをもとに、火星の軌道が楕円、さらにはすべての惑星の軌道が楕円（ケプラーの第一法則）であるという仮説を立てた。

例：ゴールドバッハの予想

$$3 + 3 = 6, 3 + 5 = 8, 5 + 5 = 10, 5 + 7 = 12 \dots$$

仮説推論：4以上の偶数は二つの素数の和に分解できる。

例：日常的議論

もし「 $\dots$ 」だとしたらこの事象はすべてうまく説明できる。すなわち「 $\dots$ 」であろう。

例：彼が犯人だとしたら、この一連の出来事はうまく辻褄があう（確証はないが）。おそらく彼が犯人に違いない。

【論理パズル】

1 遺産のラクダ：

あるアラビアの商人はラクダを 17 頭もっていたが、彼は 3 人の息子に対し、長男には $\frac{1}{2}$ 次男には $\frac{1}{3}$ 三男には $\frac{1}{9}$ を与えると遺言して亡くなってしまった。しかし、3 人の息子はラクダをどう分ければいいか途方に暮れていた。そこへ、ラクダを 1 頭連れてきた老人が現れ、その 1 頭をあげることにした。これで割り切れると喜んだ息子達は、首尾よく長男は 9 頭、次男は 6 頭、三男は 2 頭をとった。ところがである。 $9+6+2=17$ となり、そこには 1 頭のラクダが残った。これを見た老人は「どうだね、みんなこれで満足したかね。ここに残っているラクダはもともと私のものだから、持ち帰っていいね。」と悠然と立ち去った。こんなうまい話が起ころものなのか？

2 天国への道

左右に分かれ道がある。どちらかが天国行の道でもう一方が地獄行の道とする。その分かれ道の分岐点にはいつも本当のことを言う天使といつもウソを言う悪魔がいるが、見分けはつかない。このどちらかに「ハイ」もしくは「イエ」で答える一度だけの質問で天国に行くにはどのような質問をすればいいだろうか。

【参考文献】

近藤洋逸，好並英司：論理学入門，岩波全書，岩波書店，1979.

内井惣一：シャーロック・ホームズの推理学，講談社現代新書，講談社，1988.

内井惣一：推理と論理シャーロック・ホームズとルイス・キャロル，ミネルヴァ書房，2004.

野崎昭弘：詭弁論理学，中公新書，中央公論社，1976.

野矢茂樹：論理トレーニング，哲学教科書シリーズ，産業図書，1997.

野矢茂樹：論理トレーニング 101 題，産業図書，2001.

河合塾ライセンススクール編：公務員試験対策シリーズ「数的処理」，2001.

山崎直美：ルイス・キャロル「ふしぎの国のアリスの算数パズル」，さ・え・ら書房，1983.

山崎直美：ルイス・キャロル「鏡の国のアリスの算数パズル」，さ・え・ら書房，1985.

(注：山崎直美氏は津田塾大数学科の OG です)

第 13 回 角の話題（三角関数へ）

角の扱いは学校教育においては小学校から高等学校まで扱われる。しかし、意外にこの角の扱いは難しい。角そのものを扱う場面だけでなく角の測り方も複雑である。まずは次の問題を考えよう。

問：五角形の内角の和は何度か。

- ・そもそも角の定義とは
- ・なぜ、1 周は 360° なのだろうか
- ・高等学校では、なぜ弧度法（ラジアン）を用いるのだろうか
- ・高等学校での $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ の証明は厳密なのか

I：角の定義

まず角の一般的な定義を確認する。

【角の定義】（岩波数学辞典第 3 版）

h, k は平面 α 上の 1 点 O を通る相異なる 2 直線とする。 O を発し h に属する半直線を h' 、同じく O を発し k に属する半直線を k' とする。このような半直線の集合を平面 α 上の角(angle)といい、 $\angle(h', k')$ で表す。 h', k' を辺(side), O をこの角の頂点(vertex)という。

【角の定義（その 2）】（岩波数学辞典第 3 版）

1 点 O から発する 2 つの半直線 OA, OB からなる図形を角（angle） AOB といい、 $\angle AOB$ で表す。

II：学校教育での角の定義

次に、学校教育での角の扱いは次のようになっている。

1 小学校での扱い：小学校学習指導要領（2017 年 3 月告示）

小学校においては、次の 4 領域 A「数と計算」、B「図形」、C「測定」、「変化と関係」（4 年以降）、D「データの活用」、「数学的活動」が設定され、角は図形領域で扱われる。

第 1 学年...身の回りの平面図形

第 2 学年...正方形、長方形、直角三角形など

第 3 学年...二等辺三角形、正三角形、角、円、球

第 4 学年...平行四辺形、ひし形、台形、立方体、直方体、角

第 5 学年...多角形、角柱、円柱、円周率、面積、体積

第 6 学年...縮小、拡大、対称、円の面積、立体の体積

このなかで、角の定義、大きさ、演算は次のように扱われる。

- ・角の定義…一つの頂点から出る 2 本の辺が作る形を角とする。（3 年）
- ・角の大きさ…角の大きさを回転の大きさにとらえ、それを測定する単位として「度」を用いる。
直角を 90° 、1 回転を 360° と定める。（4 年）
- ・角の和（加法性）・・・三角形の内角の和、四角形の内角の和、

問：そもそも角の定義とは？　そして、なぜ1周は 360° なのか？

- ・角の向き
- ・n進法との関係

2 中学校での扱い：中学校学習指導要領（2017年3月告示）

中学校では、4領域としてA「数と式」、B「図形」、C「関数」、D「データの活用」、「数学的活動」が設定される。図形領域では、合同や相似といった図形そのものが重要視され、計量的なものとして三平方の定理が扱われる。

第1学年…図形の移動，平面と直線の位置関係，作図，立体の表面積，体積

第2学年…平行線の性質，多角形　三角形の合同

第3学年…三角形の相似，円周角と中心角，三平方の定理

問：多角形の内角の和の幾何学的意味は？（加法に意味はあるのか？）

- ・多角形の内角の和…n角形の内角の和 $= 180^\circ \times (n - 2)$

3 高等学校での扱い：高等学校学習指導要領（2018年3月告示）

高等学校の新学習指導要領では、数学Ⅰ(3)、数学Ⅱ(4)、数学Ⅲ(3)、数学A(2)、数学B(2)、数学C(2)と設定される。角に関しては、角の定義は「半直線の回転量」という意識が全面に出てくる。また、計量としては微分・積分を意識して、角を弧の長さで測る「弧度法」になる。こうして、微分・積分が展開される。

数学Ⅰ：図形と計量（三角比，正弦定理，余弦定理，面積公式）

数学Ⅱ：三角関数，微分・積分（角の拡張：度数法から弧度法へ，一般角へ）

数学Ⅲ：極限，微分・積分

数学C：ベクトル（内積） $\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ で角度を定義する。一般空間においては、まず距離を定義し内積を与えてから角を測る。

問：なぜ弧度法で測るのだろうか？

例： $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ の証明について

【高等学校での証明】：

$0 < \theta < \pi/2$ の場合（単位円）で考えれば十分。

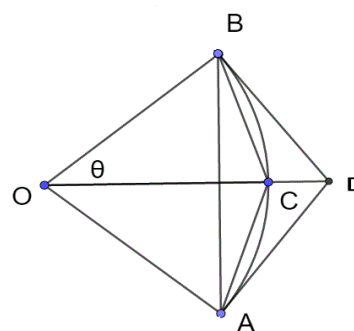
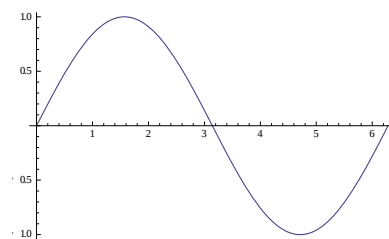
右図において、 $\triangle OBC$ ，扇形 OBC ， $\triangle OBD$ の面積を比較して、

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta \quad \cdots \cdots (\ast)$$

が成立することを用いて、はさみうちの原理より、

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

を証明した。■



問：この証明が循環論法であるという疑念

【解説】

※式において扇形の面積 θ は、円の面積が π であることを前提にしているが、そもそも円の面積 S を求めるには、正 n 角形の面積 S_n の極限、すなわち

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \times n = \pi$$

を使ってしまう。さらに、数学Ⅲでの円の面積の求め方は、

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

の積分（置換積分）を利用するとなると $\sin \theta$ の微分を使うことになるが、これもまた

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

を使う（微分の定義）ので循環論法になってしまう。

では、どうしたらいいのだろうか。教科書によっては、※式を面積の関係ではなく、弦と弧の長さの関係とみなし、

$$\text{弦 } AB < \text{弦 } AC + \text{弦 } CB < \text{弧 } AB < AD + DB$$

の関係だと解釈して循環論法を避ける解釈もある。これは、弧の長さは「内接する折れ線の上限と定義する」方法だが、上限という概念もやや高校生には難しい。

いずれにしても、学校数学をどこまで厳密に展開するかは非常に厄介な問題なので、現行の教科書の証明方法が無難なところかもしれない。

Ⅲ：角の扱い

以上、述べてきたように角の扱いは様々な観点を必要とするが、次のような見方で数学的厳密に考えよう。

線型空間 X に内積 ϕ を導入する内積空間 (X, ϕ) における半直線の対 (H, K) が定める角を考える。厳密にいうと、 $\phi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ は非退化対称形式という性質をもつ。

このとき、 H, K の単位ベクトルを各々、 h, k とすると、内積 $h \cdot k$ が (H, K) が定める角の余弦 (Cosine) という。このように内積を定義してから角を測ることで一般性を保つことができる。ここで、 A を角全体の集合、 $SO(X, \phi)$ を正規直交変換群（回転群）とすると、

$$r : A \rightarrow SO(X, \phi) : \theta \rightarrow r(\theta)$$

は角 θ に対して、角 θ の回転を対応させる。

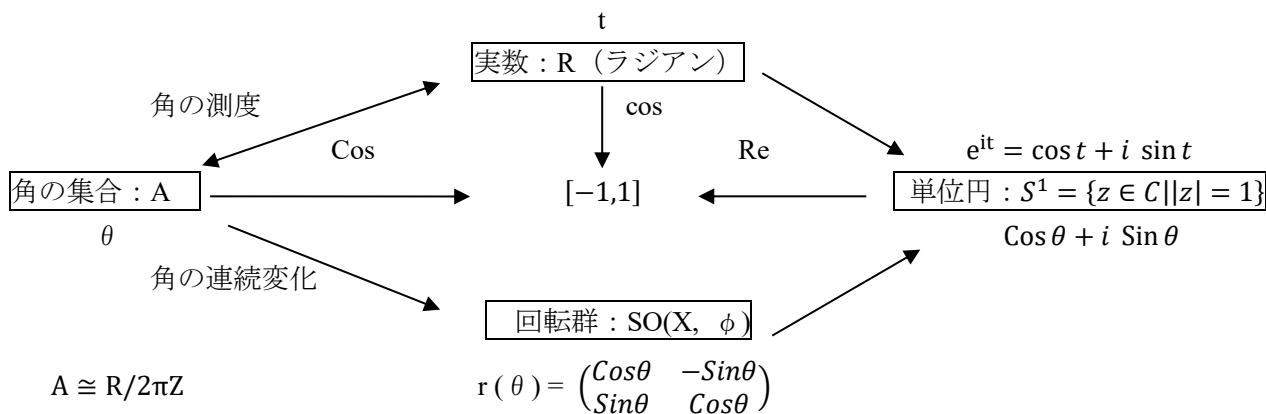
$$r(\theta + \theta') = r(\theta)r(\theta'), \quad r(-\theta) = r(\theta)^{-1}, \quad r(0) = \text{Id}$$

（ r は加法を乗法に変換する写像でもある）

また、角 θ を実数ラジアンに対応させることは、

$$\text{測度} : A \rightarrow \mathbb{R} : \theta \rightarrow t \quad (\text{角に実数に対応})$$

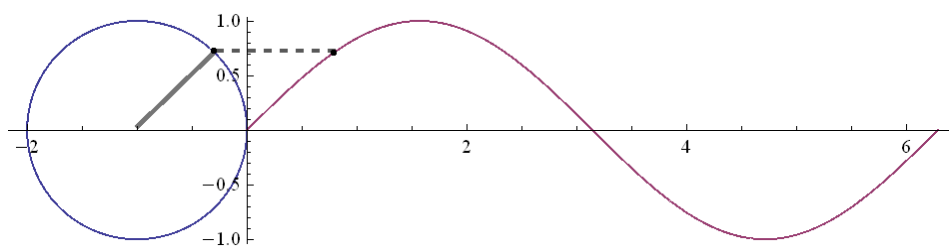
を考えることで、次の図式で構造される。



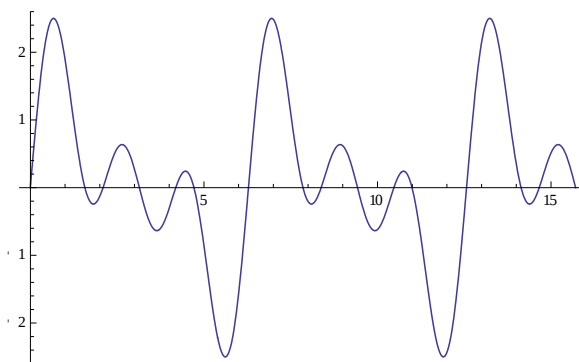
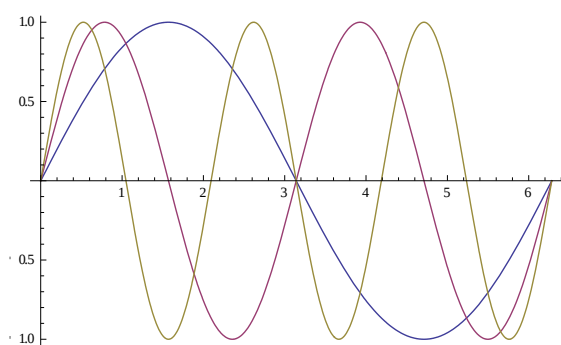
※ 「幾何学的な角そのもの」と「実数の角の測度」, 「角の連続的变化」の区別が重要.
すなわち, 2π と 4π は A の元として同一の角だが, 連続変化の回転としては異なるもの.

IV 三角関数 (円関数)

- 1 三角関数は円関数と呼ばれこともある (双曲線関数との関係で)



- 2 三角関数の合成



$y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = \sin 3x$ を並べたもの 合成: $y = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$ のグラフ

- 3 実感する三角関数 (サウンドなど)

コンピュータなどを利用する.

例: 分数のサウンド, 円周率のサウンド

4 身近にある三角関数

【周波数とは】

周波数とは 1 秒間に繰り返される波の数のことで、ヘルツ (Hz) という単位で表される。

【波長とは】

光速 ($30 \times 10^8 \text{m/s}$) を周波数で割ったもので波の山から山または谷から谷までの距離のこと。

【電磁波の種類 (周波数と波長)】

呼 称	周 波 数	波 長	用 途
長 波	30～300kHz	10～1km	船舶
中 波	0.3～3MHz	1～0.1km	船舶通信、中波ラジオ、アマチュア無線
短 波	3～30MHz	100～10m	国際短波放送、無線
超短波 VHF	30～300MHz	10～1m	FM 放送、TV 放送、無線 (消防、列車、警察無線) コードレス電話
極超短波 UHF	0.3～3GHz	1～0.1m	TV 放送、携帯電話、PHS、タクシー無線、レーダー、無線 LAN、
マイクロ波	3～30GHz	10～1cm	衛星通信、衛星放送、レーダー、電波天文、無線 LAN
ミリ波	30～300GHz	1～0.1cm	電波天文、衛星通信、レーダー
赤外線	3THz～300THz	$10^{-4} \sim 10^{-6} \text{m}$	赤外線通信、こたつ
可視光線	375THz～750THz	$0.8 \times 10^{-6} \sim 0.4 \times 10^{-6} \text{m}$	人間が目を感じる光
紫外線	750THz～30PHz	$0.4 \times 10^{-6} \sim 10^{-8} \text{m}$	日焼け、殺菌
X 線	30PHz～300Ehz	$10^{-8} \sim 10^{-12} \text{m}$	レントゲン撮影、CT スキャン
γ 線	30EHz～	$10^{-11} \text{m} \sim$	放射線の一種

単位：1K=10³、1M=10⁶、1G=10⁹、1T=10¹² (テラ)、1P=10¹⁵ (ペタ)、1E=10¹⁸ (エクサ)

【日本の携帯電話の周波数帯域利用状況】

周波数帯	NTT ドコモ	au	ソフトバンク・Y mobile
700MHz	LTE	LTE	LTE
800MHz	LTE W-CDMA	LTE W-CDMA	
900MHz			LTE W-CDMA
1.5GHz	LTE	LTE	LTE
1.7GHz	LTE (東名阪地域のみ)		LTE W-CDMA
2.1GHz	LTE W-CDMA	LTE W-CDMA	LTE W-CDMA
2.5GHz			
3.5GHz	LTE	LTE	LTE

W-CDMA：Wideband Code Division Multiple Access は第 3 世代携帯電話 (3G) のアクセス方式の一つ

LTE：Long Term Evolution は、携帯電話の通信規格で、W-CDMA や CDMA2000 等の第 3 世代携帯電話 (3G) と、第 4 世代携帯電話 (4G) との間の中間過渡期な技術。

Wikipedia より

※周波数が高い：直進性が強く、情報伝送量が大きい

※周波数が低い：直進性が弱く、情報伝送量が小さい

【参考書】

森毅：「数学の歴史」、紀伊国屋書店、1979.

森毅：「微積分の意味」、日本評論社、1978.

小島順：「線型代数」、日本放送出版協会、1976.

第 14 回 円周率 π と自然対数 e の話題 (指数・対数関数へ)

つくる π ・目でみる e

I : 円周率 π

算数・数学に出てくる不思議な数の代表を挙げなさいというと、円周率 (π) を筆頭に挙げる人が多いだろう。円周率は誰が発見し、どのようにその数値を計算しようとしたかは、人類の輝かしい歴史でもある。児童・生徒にただ教科書の中で円周率を教えるのではなく、歴史をひもときながらそして人類が辿ってきたように教えることが重要に思える。

【学校での扱い】

1 円周率の扱い

学校教育では小中高等学校で一貫して扱う数である。

- ・ 小学校での扱い (円周÷直径)
3 年…円の半径, 直径, 作図 5 年…円周率 (3.14), 6 年…円の面積,
- ・ 中学校での扱い (π の使用)
1 年… π , 扇形の弧の長さ, 面積
- ・ 高等学校での扱い (弧度法)

2 円周率の歴史 (計算で求める円周率)

歴史的には、エジプト人やバビロニア人あたりが近似値を求めていたようだ。

① 円に内接・外接する多角形から求める

アルキメデス (BC287? ~ 212) が $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$ ($3.1408\cdots < \pi < 3.1428\cdots$) と計算し、その後、フィボナッチ、ヴィエート、関孝和などが精密な計算を行った。

【多角形による近似方法】

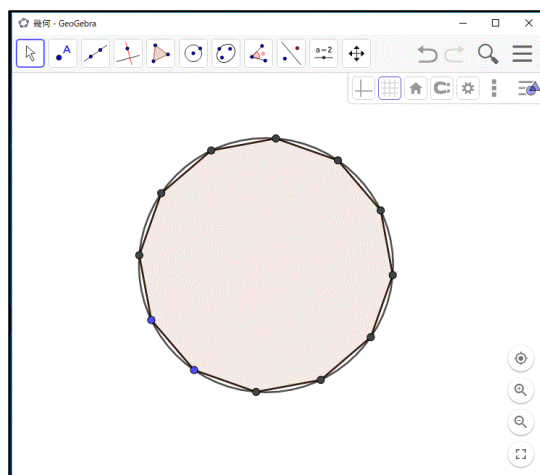
手作業：多角形を描いて、周囲の長さを測る。

コンピュータ活用：コンピュータ上で多角形を描いて、円周率を計算する。

(幾何学ソフトウェア：GeoGebra 等の利用)

<GeoGebra のダウンロード先> (フリーソフト)

<http://www.geogebra.org/cms/ja>



例：円周率が 3.05 より大きいことを証明しなさい。
(2003 年東大理系 前期)

② 無限級数から求める（17 世紀以降）

微分積分の発見に伴い、ニュートンは無限級数を用いて π を 16 桁まで計算した。その後もいろいろな数学者が π の計算に取り組んだ。

【アークトンジェントの利用例】

関数の taylor 展開：

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdots, \quad -1 < x < 1$$

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} \cdots, \quad -1 < x < 1$$

と計算できる。（ただし、この級数の収束が遅い）
すなわち、

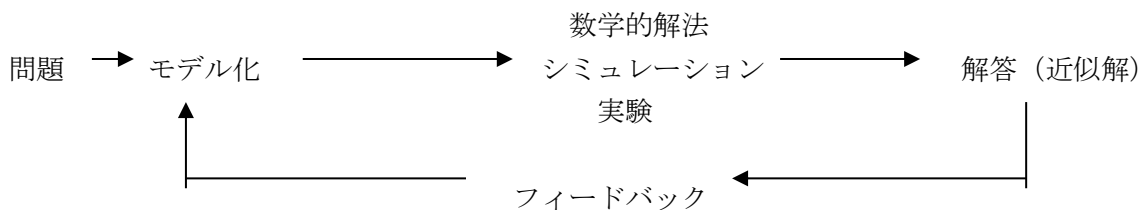
$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} \cdots \right)$$

③ 実験で求める円周率（試行錯誤と予想の数学）

算数・数学教育では数学的厳密性や論理性を重視する。しかし、この伝統的な考え方の根底にあるものは、完成された算数・数学的事実に対してであって、人間（児童・生徒から数学者も含めて）が算数・数学に取り組む姿勢とは異なる。昔から一流の数学者たちは、難問に向かう際はあれこれ考えたり、試行錯誤や思考実験したり、予想したりしながら数学に取り組んできた。

従来の算数・数学教育では児童・生徒のこのような態度を育成することは少し弱かったと思う。そして、このような学習活動を意図的に計画することは重要だと考える。ある問題に立ち向かうとき、その問題の結果を出すことよりも、解決に向けての「方法」や「態度」を身に付けることの方が、より重要だからである。今回は、その解決方法の一つである「モデル化とシミュレーション」の考え方をいくつかの例をもとに紹介する。

<問題解決の手順>



【数学実験 1】：円柱やコインを使って測る — 実測して統計をとる活動 -
<手順>

- (1) まず、円柱やコインを用いて円周と半径の比を求める
- (2) 実験の回数を増やしてデータを収集する
- (3) 集めたデータで統計的手法（例えば平均など）を用い、実験値と理論値を比較する。



○モンテカルロ法によるシミュレーション

この方法は、主に乱数を用いたシミュレーションを何度も行うことにより近似解を求める計算手法で、コンピュータの父と呼ばれるジョン・フォン・ノイマンが考案したといわれ、ギャンブルの国モナコの首都モンテカルロから取ったと言われている。数学解析的に解くことができない問題でも、十分多くの回数シミュレーションを繰り返すことにより、近似的に解を求めることができる。

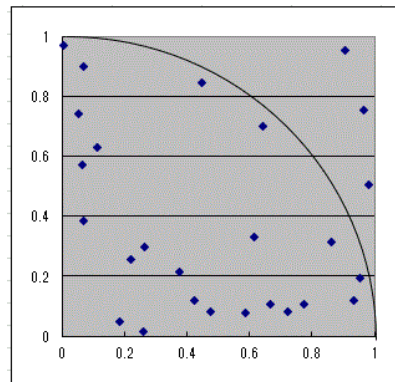
【数学実験 2】：ゴマをまく

- ・ 四角形の面積 1 : 4 分円の面積 $\pi/4$
 - ・ 四角内のゴマ数 N : 4 分円内のゴマ数 M
- とすると、

$$1 : \pi/4 = N : M$$

が成立。これを解くと、次のように計算できる。

$$4 \frac{M}{N} = \pi$$



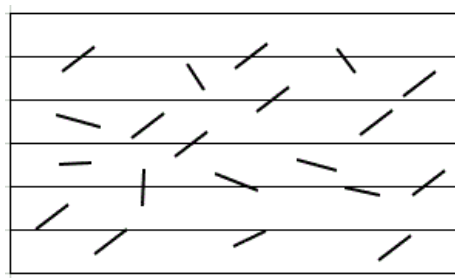
【数学実験 3】：針をまく (Buffon の針)

針の長さ : $2a$, 線の間隔 : $2L$ とすると、針が平行線と交わる確率 P は、次のように求められることが知られている。

$$P = \frac{2a}{\pi L}$$

このことから、次のように円周率が計算できる。

$$\pi = \frac{2a}{PL}$$



証明：針の中心 m とし、 m と一番近い線分までの距離を y ,

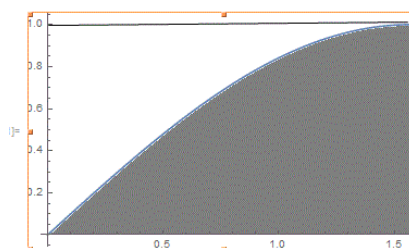
針と線分とのなす角を θ とする。ここで、

$0 \leq y \leq L, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ としてもいい。すると、針が線分と交差する条件は、

$$y \leq a \sin \theta$$

を満たせばいい。よって、

$$\text{全体} = L \times \pi/2, \text{斜線部} = \int_0^{\pi/2} a \sin \theta d\theta = a \quad \blacksquare$$



3 数学実験の学習展開方法

問題解決において、生徒に次の段階を踏ませながら活動させるといい。

【手順】

- (1) どのようなものを用意するか (モデル化)
- (2) どのように作業を進めるか (シミュレーション)
 - ・ 「でたらめ」はどう作るのか
 - ・ コンピュータをどう利用するのか
- (3) 統計的手法をどのように身に付けさせるか
 - ・ データの処理

Ⅱ：自然対数の底 e について

1：自然対数の底 e について

数 e とは $e = 2.7182818\cdots$ である無理数そして代数方程式の解ではない超越数である。

これは意外にも複利計算に現れる。

例えば、1 万円を年利率 $1=100\%$ での複利で預金するとしよう。

1 年後は、1 万円 $\times (1+1) = 2$ 万円

となるが、半年の利率 $0.5=50\%$ として半年複利で計算すると、

1 年後は、1 万円 $\times (1 + 1/2)^2 = 2.25$ 万円

となる。これを毎月にすると、

1 年後は、1 万円 $\times (1 + 1/12)^{12} = 2.61$ 万円

となるが、これを瞬間毎の複利、つまり連続複利にすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

を計算することになり、 $2.7182818\cdots$ が現れる。しかし、あまり現実的な事例ではない。

2：高等学校の教科書での扱い（伝統的な導入）

(1) 極限として定義：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

(2) 指数関数の導関数として定義：

$y = a^x$ の導関数において、

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x = y$$

となるような a の値を e とする。

(3) 定積分の値として定義：

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = 1$$

となるような正の数 e と定義

問：各自が高校時代使用した教科書を確認してみよう。

3：目で見る自然対数の底 e

1m のゴムが 2m に伸びるとき、一般に、100%増、逆に 2m が 1m に縮むとき 50%減という。

ここでは「相対的な増加率」を考える。これは、伸びている各時点の長さを分母とし、後続の長さを分子とする割合のことである。そして、それを限りなく無限小にした伸び率として累積する。すなわち、無限小伸び率 $\Delta x/x$ の総和が、蓄積されたトータルな伸び率として表現できる。

具体的に、1m から n 等分して各等分点での伸び率を計算して、2m まで加算することで求めてみよう。

$$\frac{1}{1} = 1 \quad \dots 1 \text{ 分割}$$

$$\frac{0.5}{1} + \frac{0.5}{1.5} = 0.83333 \quad \dots 2 \text{ 分割}$$

$$\frac{0.3333}{1} + \frac{0.3333}{1.3333} + \frac{0.3333}{1.6666} = 0.782692 \quad \dots 3 \text{ 分割}$$

$$\frac{0.25}{1} + \frac{0.25}{1.25} + \frac{0.25}{1.5} + \frac{0.25}{1.75} = 0.759524 \quad \dots 4 \text{ 分割}$$

$$\frac{0.1}{1} + \frac{0.1}{1.1} + \frac{0.1}{1.2} + \frac{0.1}{1.3} + \dots + \frac{0.1}{1.9} = 0.718771 \quad \dots 10 \text{ 分割}$$

一般に,

$$\frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{0}{n}} + \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{n-1}{n}} \quad \dots n \text{ 分割}$$

となり, n を無限 (連続的) にして伸び率を計算すると,

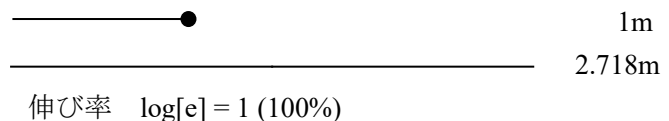
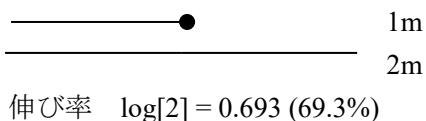
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{i}{n}} = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \log[2] = 0.69314 \dots$$

すなわち, ゴムが 2 倍の長さになるとき 100% 増と言わずに, $\log[2] = 0.69$ 伸びたということにする. すると, 逆に 2m から 1m に縮むとき, $\log[1/2] = -0.69$ 伸びた (0.69 縮む) と言うことができる.

では, この累積相対的な増加率が 1 となる長さ (伸びた結果) x は何だろうか. すなわち,

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \log[x] = 1$$

をみたすものである. 実はこの x が $e = 2.718 \dots$ である. すなわち, この自然対数の底が累積相対的な伸び率として 1 になる倍率である.



例: 物価の例

物価の上昇率が 2% 増、翌年 5% 増 (前年比) の場合、7% 増にはならないが (近似的には成り立つが) 対数を取ることで,

$$\{\log[1.02], \log[1.05]\} = \{0.0198, 0.04879\}$$

それぞれ, 対数のスケールで, 1.98% 増, 4.88% 増となり結局 2 年間で 6.86% 増と言い直すと, 確かに

$$\log[1.02 \times 1.05] = 0.06859$$

と加法が成立する.

例：円高の例

1 ドル 120 円から 100 円になるとき,ドルの円価格が 16.7%減,円のドル価格が 20%増というより,

$$\{\log[\frac{120}{100}], \log[\frac{100}{120}]\} = \{0.182322, -0.182322\}$$

となり, 自然対数で互いに 18.2%の増減といった方が考えやすい.

このように乗法的な現象(自然界に多く見られる)は, 対数を取ることで, 加法の構造(人間の認識しやすい構造)にすることができる.

4：指数関数の整級数展開

関数 e^x を整級数(べき級数)で展開すると,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$$

となり, この式に $x \rightarrow ix$ を代入すると,

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \cdots \frac{(ix)^n}{n!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \right) = \cos x + i \sin x$$

となる. これが有名なオイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

である. ここで $x = \pi$ とおくと,

$$e^{\pi i} = -1$$

が得られ, 話題にした数がすべて出揃った.

【参考図書】

P. ベックマン： π の歴史, ちくま学芸文庫, 筑摩書房, 2006.

堀場芳数：円周率 π の不思議, ブルーバックス, 講談社, 1989.

金田康正： π の話, 東京図書, 1991.

小島順：微分積分入門(上), 日本評論社, 1996.

E. マオール：不思議な数 e の物語, 岩波書店, 1999.

第 15 回 素数の話題

数の扱い

I：学習指導要領から

小学校 1 年～4 年	整数の表し方、整数の計算
小学校 5 年	整数の性質（奇数、偶数、約数・倍数）
中学校 1 年	正負の数、文字を用いた式、素数、自然数の素因数分解
中学校 2 年	文字を用いた四則演算
中学校 3 年	平方根、式の展開・因数分解（自然数の素因数分解）

II：さまざまな数に関する話題

1 ピタゴラス数

ピタゴラス数とは、三平方の定理をみたす自然数の組のこと。

$\{3, 4, 5\}$, $\{5, 12, 13\}$, $\{8, 15, 17\}$ など

2 完全数

自然数の完全数とは、その数とその数のすべての約数の和が等しいものをいう。この場合、自分自身は約数として含めない。最小の完全数は 6 である。

$\{6, 28, 496, \dots\}$

【未解決】

- ・完全数は無限個存在するか
- ・奇数の完全数は存在するか

3 友愛数

自然数の友愛数とは、自分自身を除いた約数の和が互いに他方と等しくなるような数のことをいう。一番小さな友愛数の組は $\{220, 284\}$ である。現在まで知られる友愛数の組はすべて偶数同士、奇数同士の組である。

$\{220, 284\}$, $\{1184, 1210\}$, $\{2620, 2924\}$, $\{5020, 5564\}$, $\{6232, 6368\}$, $\{10744, 10856\}$
 $\{12285, 14595\}$, $\{17296, 18416\}$

【友愛数の公式】

$p = 3 \times 2^{n-1} - 1$, $q = 2p + 1$, $r = p \times q + p + q$
がすべて素数ならば、

$M = 2^n \times p \times q$, $N = 2^n \times r$ が友愛数の組になる。

【未解決】

- ・友愛数は無限個存在するか
- ・偶数と奇数の友愛数の組は存在するか。

III：素数の話題（円周率と自然対数の底との深い関係）

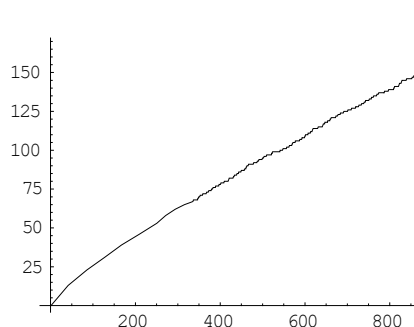
1 素数の分布（e との関係）

素数の個数が無限個あることは昔から知られていた。実数 x に対して x 以下の素数の個数を $\pi(x)$ とおくと、 $x \rightarrow \infty$ にすると $\pi(x)$ がどのようなになるかは興味深い問題である。この素数は自然数の中に不規則に存在していると考えられているが、漸近的な性質については次の素数定理が証明されている。

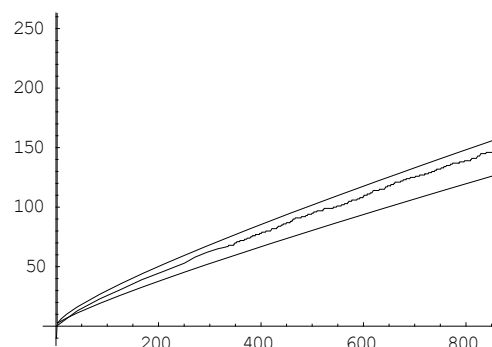
定理：素数定理(Gauss など)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log[x]}, \quad \pi(x) \sim \int_2^x \frac{1}{\log[t]} dt \quad (x \rightarrow \infty)$$

後半の素数定理の証明にリーマンのゼータ関数が関係した.



$\pi(x)$ のグラフ



上から $\int_2^x \frac{1}{\log[t]} dt$ $\pi(x)$ $\frac{x}{\log[x]}$

2 双子素数

素数のなかで連続する奇数の組を双子素数と呼ぶ. 3 と 5, 5 と 7 がその例である. 100 までの組を列挙する. Mathematica のコマンドでは,

```
p = Prime[Range[1, 25]]
pp = Partition[p, 2, 1]
Select[pp, (#[[2]] - #[[1]] == 2)&]
```

{3,5}, {5,7}, {11,13}, {17,19}, {29,31}, {41,43}, {59,61}, {71,73}

3 メルセンヌ数

メルセンヌ数とは, $2^x - 1$ の形をした自然数のことをいう. 特にこの数が素数になる場合はメルセンヌ素数といい, 最大素数の発見と非常に深い関係を持っている. これに関しては GINPS (Great Internet Mersenne Prime Search) というプロジェクトがあり, 最大素数の発見に世界中がしのぎを削っている. このメルセンヌ素数が無限個存在するかは数学上の未解決問題である.

例えば, $x = 1$ から 100 までの自然数に対して $2^x - 1$ を計算したもののうち, それが素数であるものを選ぶと,

```
Select[Map[(2^#-1)&, Range[1, 100]], PrimeQ]
{3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287, 2147483647,
 2305843009213693951, 618970019642690137449562111}
```

4 ゼータ関数 (π との関係)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

というよく知られた関数について, オイラーは

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (*)$$

という関数を考えた. $s > 1$ のとき, この級数は収束するが, この関数を現在ではリーマンのゼー

タ関数と呼んでいる．この式（＊）は自然数 n が，

$$n = p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \times p_3^{e_3} \cdots \times p_n^{e_n} \quad (\text{ただし, } p_i \text{ は素数})$$

という形にかけるので，（＊）は

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

$$= (1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \cdots)(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \cdots) \cdots$$

$$= \prod \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod \frac{p^s}{p^s - 1} \quad (p: \text{素数全体})$$

$$= \frac{2^s}{2^s - 1} \times \frac{3^s}{3^s - 1} \times \frac{5^s}{5^s - 1} \times \cdots$$

とかける．これをオイラー積という．

【リーマン予想】

「 ζ 関数の自明でない零点はすべて実部が $\frac{1}{2}$ である．」

現在，この予想は数学史上最難関の未解決問題といわれている．

※ゲオルク・フリードリヒ・ベルンハルト・リーマン

(Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 年- 1866 年)

【参考資料】

- ・モバイルアプリ「PRIME SMASH!」, Panasonic.
- ・DVD：リーマン予想 天才たちの 150 年の闘い，素数の魔力に囚われた人々，NHK エンタープライズ，2010，3800 円．

曲線や曲面の扱いは代数幾何や微分幾何に分類される．しかし，学校数学における曲線と曲面の扱いは，おもに高等学校 3 年次に扱われる程度である．それまでは関数のグラフとしての曲線の扱いがメインである．すなわち，1 次関数のグラフとしての直線，2 次関数のグラフとしての放物線，三角関数のサインカーブ，指数関数・対数関数のグラフなどである．

しかし，われわれの身の回りには，自然界はもとより人工物（建築物など）においては，様々な曲線や曲面を日ごろから見ている．これらは数学の面白さでもある．

【学校数学での扱い】新学習指導要領より

数学 C：平面上の曲線と複素数平面（現行では数学Ⅲ）

扱う内容：二次曲線（楕円，双曲線，放物線），媒介変数表示，極座標による極方程式．

I：曲線の媒介変数表示（2 次元）代表的なもの（Live Math）

○2 次曲線

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad \text{だ円}$$

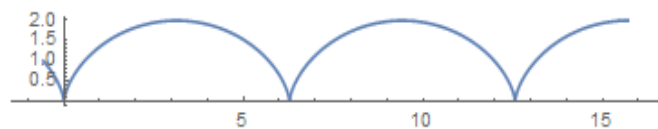
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\begin{cases} x = a \cosh t \\ y = b \sinh t \end{cases} \quad \text{双曲線}$$

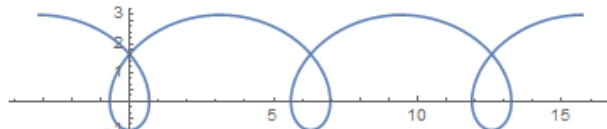
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

○サイクロイド(cycloid)

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$



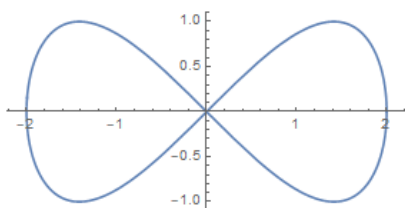
サイクロイド ($a = b = 1$)



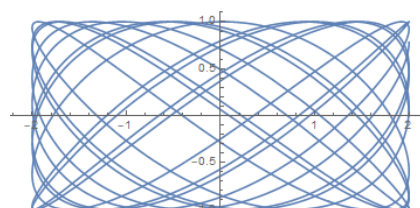
トロコイド ($a = 1, b = 2$)

○リサージュ曲線 (Lissajous)

$\begin{cases} x = a \cos m t \\ y = b \sin n t \end{cases}$ $m : n$ が有理数の時は周期運動，無理数の時は周期運動ではなく長方形内を密に運動．



リサージュ ($a = 2, b = 1, m = 1, n \approx 2$ の時)



($a = 2, b = 1, m = 1, n \approx \sqrt{2}$ の時)

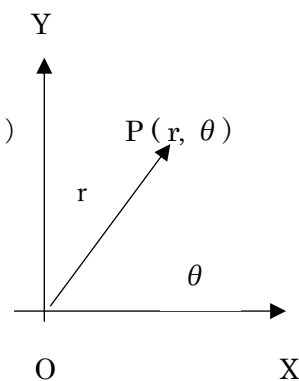
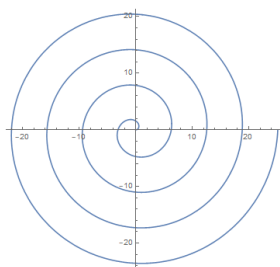
Ⅱ：極方程式（2次元）（人間の自然な座標）

平面上の点 P の位置を直交座標（デカルト座標） (x, y) で表示するのではなく、定点（極） O を基点とし、 O からの半直線 OX （始線）をもとに、点 P の位置を OP の長さ r 、 OX からの回転角（偏角） θ で表すことを極座標 (r, θ) という。点 P が (r, θ) を使って $r=f(\theta)$ と書けるとき、 $r=f(\theta)$ を極方程式という。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

の関係が成り立つ。

○螺旋（アルキメデスのらせん）： $r = a\theta$ ($a > 0$)

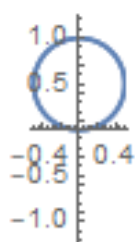


極座標と直交座標

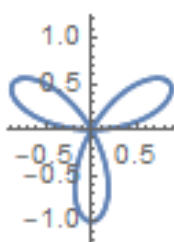
$$a=1 \quad 0 < \theta < 8\pi$$

○正葉線： $r = a \sin n\theta$ ($a > 0, n \in \mathbb{N}$)

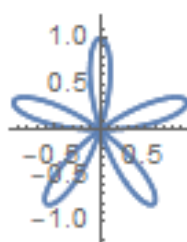
$r = a \sin \theta$ は極で始線に接する円の一般型になっている。



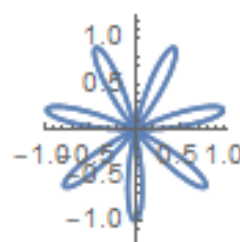
$$n=1$$



$$n=3$$



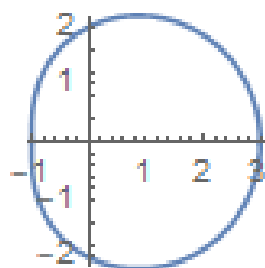
$$n=5$$



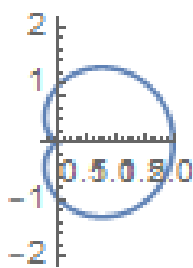
$$n=7$$

○リマソン： $r = a \cos \theta + b$ ($a > 0, b > 0$)

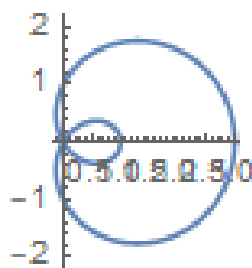
特に、 $a = b$ の時はカージオイド（心臓形）という。



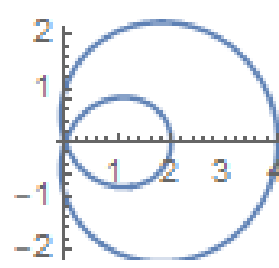
$$a=1, b=2$$



$$a=1, b=1$$



$$a=2, b=1$$



$$a=3, b=1$$

Ⅲ：自然界の中のいろいろな図形

1：対称な図形と非対称な図形

- ・対称な例（出身校の校章など）
- ・非対称な例

2：黄金分割

定義：AB を一つの線分とする．AB 上の一点 C が，大きい方の切片と小さい方の切片の比率を，線分全体と大きい方の切片の比率と等しくするように AB を分割するとき，黄金分割と呼ぶ．



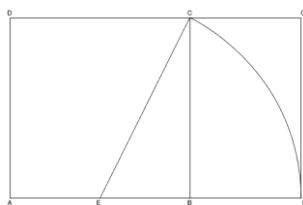
$$AC : CB = AB : AC$$

いま． $AC = \tau$ ， $CB = 1$ とすると，

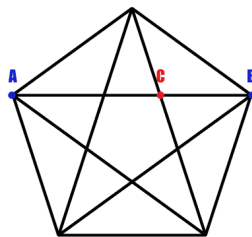
$$\tau : 1 = \tau + 1 : \tau$$

より $\tau^2 - \tau - 1 = 0$ を解くと，

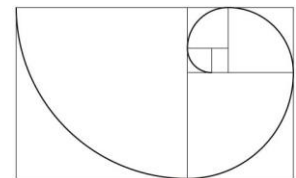
$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.62 \quad (\text{黄金比})$$



正方形から黄金長方形の作図



正五角形（C が黄金分割）

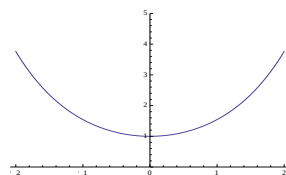


黄金螺旋とオウム貝

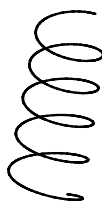
3：その他の身近な曲線（数式が創る曲線）

- ・カタナリー（懸垂曲線）・・・双曲線関数

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh [x]$$

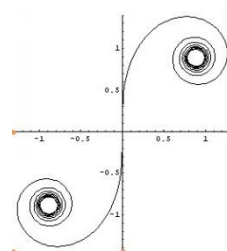


- ・らせん（空間内のバネ曲線）



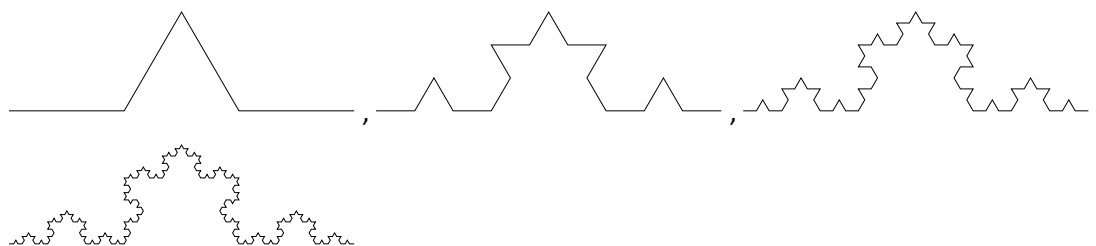
バネ

- ・クロソイド



高速道路のインターチェンジ

・雪の曲線 (Koch の曲線)・・・フラクタル図形



【雪の曲線の次元は？】(相似次元の話)

私たちが住んでいる世界は3次元です．さてこの次元とは何でしょう．

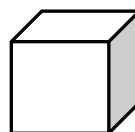
直線



正方形



立方体



ここで上の3つの図形を $\frac{1}{2}$ に相似縮小すると何個に分割されるかを考える．

直線 = 個

正方形 = 個

立方体 = 個

このとき、 $2^D = \text{$ をみたす D が次元と定義する．

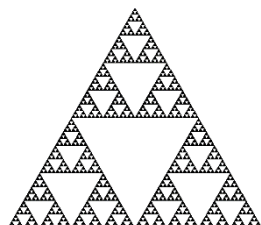
問：直線，正方形，立方体の次元を確認しよう．

一般にある図形を $\frac{1}{M}$ に縮小したときに N 個に分割されるとする．このとき $M^D = N$ をみたす D を

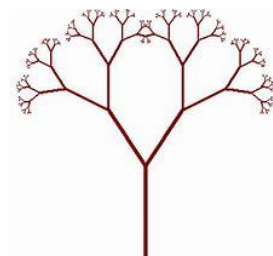
次元と定義する．すると，上の雪の曲線は $\frac{1}{3}$ にすると4個になるので $3^D = 4$ をみたす D が次元となる．

問：雪の曲線の次元 D はどのくらいでしょうか？

例：フラクタル図形の例



シェルピンスキーギャスケット



樹形

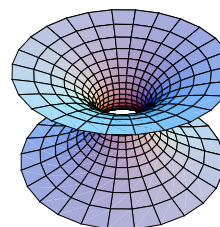
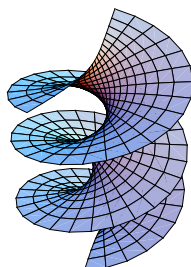
4：不思議な図形（曲面）・・・石けん膜の数学

石けん膜は表面張力により，与えられた枠の表面積を最小（極小）にしようとする性質がある．数学ではこのような曲面を「極小曲面」という．

【極小曲面の例】

・ヘリコイド（らせんに膜を張ったもの）

・カテナイド（カテナリーを一回転させたもの）



・ 建築

物

代々木第一体育館

ミュンヘン・オリンピックスタジアム



ム

屋根がつり橋の構造になっている。
いる。

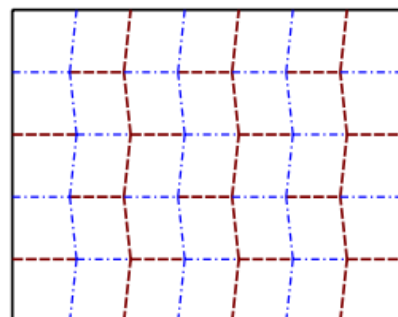
スタジアムの天井が極小曲面になって

問：世の中の不思議な曲線や曲面を探してみよう．

例：氷結の缶のデザインなど．

【実習】ミウラ折に挑戦

ミウラ折りとは，1970年に東大宇宙航空研究所の三浦公亮氏が考案した折り畳み方である．これは人工衛星の太陽電池パネルの展開方法を研究する過程で生み出された．身近なところでは観光地図の畳み方などに使われている．（例：イカロス）



【参考図書】

- ・いろいろな曲線：栗田稔，共立出版，1966．
- ・Mathematica 曲線と曲面の微分幾何：A. Gray，トッパン，1996．
- ・日常にひそむ数理曲線：ベネッセ，佐藤雅彦，小学館，2010．
- ・数学 WEB サイト：Waseda Live Math

第 17 回 物理学と数学

－数理モデルと微分方程式－

前期にも話題にしたように、数学は自然科学の歴史とともに歩んできた（自然哲学）。特に、ニュートン（Newton：1642-1727）、ライプニッツ（Leibniz：1646-1716）らが微分積分を確立した後は、ケプラーの 3 つの法則をもとにニュートン力学が理論化され、マクスウェルの電磁方程式、アインシュタインの相対性理論そして量子力学への発展していく。その過程で威力を発揮した分野はベクトル解析、微分方程式である。ここでは、おもに微分方程式について考えていこう。

微分方程式という数学モデルで記述できる世の中の現象は多い。特に自然現象においては強力である。次の 2 つの例は基本的な現象である。物理現象を扱うのでパラメータは t を使う。

自然現象 人間の思考 形

数学による数理モデル

I : $\frac{dN}{dt} = kN$ 型 または $\frac{\dot{N}}{N} = k$ 型 （ k : 定数, 成長率モデル）

【生物の増殖モデル】（マルサスの法則）

生物の増殖率（人間の人口など）その時点の時刻 t での量に比例すると言われる。時刻 t でのその生物の量を N とすると、瞬間増殖率は $\frac{dN}{dt} = \dot{N}$ ($\frac{\Delta N}{\Delta t}$) なので、

$$\frac{dN}{dt} = kN \quad k: \text{定数} \quad \text{もしくは} \quad \frac{\dot{N}}{N} = k \quad (\text{一定})$$

すなわち、単位当たり増殖率（相対増殖率） $\frac{\dot{N}}{N} = k$ が一定とかける。

（英国の経済学者マルサスの人口論や微生物の生態など）

【数学的解法】

$$\frac{dN}{dt} = kN \quad k: \text{定数} \quad (t=0, N(0) = N_0)$$

解：これは簡単な 1 階の微分方程式なので、

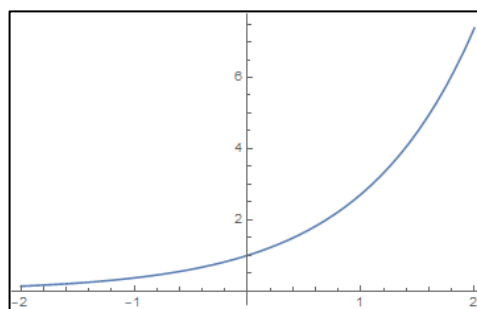
$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = k$$

$$\int \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} dt = \int k dt$$

$$\log|N| = kt + C$$

初期条件より、 $\therefore N = N_0 e^{kt}$

このモデルは自然現象の中でも最も基本的な関係を表現している。



【放射性崩壊モデル】

物理学者ラザフォードは、放射性原子 A の数 N について、崩壊によって単位時間あたりの減少はそのときに存在する原子 A の個数 N に比例することを発見した。すなわち、

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

(λ : 原子 A 固有の崩壊定数) ①

が成立する。放射性原子 A の個数が始めの半分になる時間を半減期という。そこで、始めの数を N_0 、

t 時間後に崩壊せずに残っている個数を N 、半減期を T としてこれらの関係を求めてみる。まず、微分方程式①を解くと、

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

半減期 T より、

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$$

これから、

$$T = \frac{1}{\lambda} \log 2 \quad \text{半減期}$$

が求まる。さらに、数 N になるまでの時間 t を計算するには、

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{\log 2}{T} t} = N_0 e^{-\log 2 \frac{t}{T}} = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

よって、

$$\frac{N}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \quad \text{より} \quad \frac{t}{T} = -\frac{\log\left(\frac{N}{N_0}\right)}{\log 2}, \quad t = -\frac{\log\left(\frac{N}{N_0}\right)}{\log 2} T.$$

【その他の適用例】

- ・薬の体内吸収モデル (y はある時刻における血液中の薬量, 血液中の濃度変化)
- ・冷却の法則 (熱物体とその周囲との温度差 θ において、温度差の減少はその温度差に比例する)

【例題】年代測定の $^{14}_6\text{C}$ 法 (炭素 $^{12}_6\text{C}$ の放射性同位体)

炭素の放射性同位体 $^{14}_6\text{C}$ は、窒素 $^{14}_7\text{N}$ と宇宙線の衝突作用によって大気中で作られる。また一方で $^{14}_6\text{C}$ は不安定なため半減期 5.730×10^3 年で β 崩壊(電子1個が飛び出し、中性子が陽子に変化することで質量数が変わらず原子番号が1増える)して窒素 $^{14}_7\text{N}$ になるので、大気中の二酸化炭素に含まれる $^{14}_6\text{C}$ は一定に保たれている。従って、光合成によって二酸化炭素を取り込んでいる植物内も $^{14}_6\text{C}$ が一定とみなしている。しかし、植物が死滅すると光合成ができなくなり、 $^{14}_6\text{C}$ が減っていく。このことを利用して次のような年代測定をしてみよう。

ある遺跡から出土した木に含まれる $^{14}_6\text{C}$ を測定したところ、生きている植物体中の $^{14}_6\text{C}$ に対して 70.7%であった。この木が枯れたのは何年前と推定できるか。 [約 2866 年]

注) $^{14}_6\text{C}$ 14 : 質量数 (陽子+中性子), 6 : 原子番号 (陽子の数)

【マルサスの法則の修正】

マルサスの法則に対し、パールとリードは個体数（人口）の増加に対し、下のような「個体数は増えれば増えるほど増加率にブレーキがかかる」というモデルを考案した。

$$\frac{\dot{N}}{N} = k - lN \quad (k, l : \text{定数}) \quad N(0) = N_0 = \frac{1}{2}$$

ここでは、簡単のために、 $k=1, l=1$ としてこの微分方程式をといてみよう。

解：

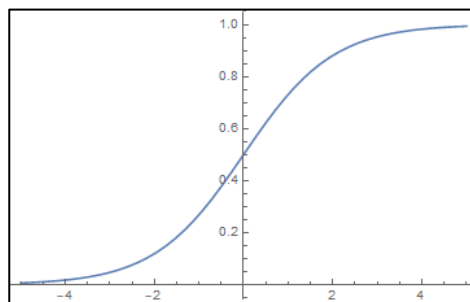
$$\frac{\dot{N}}{N} = 1 - N$$

$$\frac{\dot{N}}{N(1-N)} = 1$$

$$\int \frac{1}{N(1-N)} dN = \int 1 dt$$

これを解くと、(中略)

$$N(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

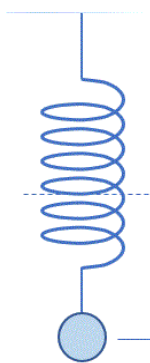


Ⅱ : $\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = 0$ 型 ; $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ 型

これは線型 2 階の微分方程式といって、一般型は $\frac{d^2x}{dt^2} + p(t) \frac{dx}{dt} + q(t)x = f(t)$ であるが、ここでは、簡単のために a, b を定数, $f(t)=0$ で考えよう。Newton 力学的モデルではこれで十分である。

【単振動モデル】 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ (抵抗なし $p(t)=0$, 外力なし $f(t)=0$, ω : 角速度)

単振動



$$x = r \sin \omega t$$

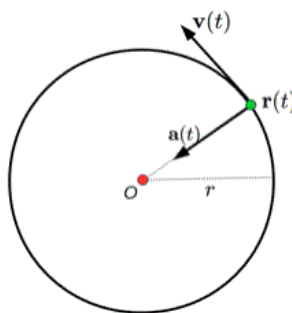
$$(r \cos \omega t, r \sin \omega t)$$

$$\dot{x} = r\omega \cos \omega t$$

$$\ddot{x} = -r\omega^2 \sin \omega t$$

$$\therefore \ddot{x} = -\omega^2 x$$

等速円運動



$$\mathbf{r}(t) =$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t)$$

$$\therefore \ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r}$$

ともに同じ微分方程式をみたすことがわかる。

これは,

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x} \text{ (フックの法則)}, \mathbf{F} = m\mathbf{a} \text{ (ニュートンの運動方程式)}$$

の連立方程式をとくことにより, $m\mathbf{a} = -k\mathbf{x} \rightarrow m\ddot{\mathbf{x}} = -k\mathbf{x} \rightarrow \ddot{\mathbf{x}} = -\frac{k}{m}\mathbf{x}$

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2\mathbf{x}$$

を導くことができたので, この線型 2 階微分方程式を解くことになる.

【数学的解法】

この線型 2 階微分方程式を解くことは学部「微分方程式」の授業レベルになるので, ここでは天下的に説明をする (きちんと理解したい人は, 微分方程式の本を読んで下さい).

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \quad (*)$$

において, t に関する 2 次方程式 $t^2 + at + b = 0$ を考える (特性方程式). そしてこの 2 次方程式の解の判別で分類する.

① $D > 0$ のとき, 2 解をそれぞれ λ, μ とすると, 微分方程式(*)の解は,

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\mu t} \quad C_1, C_2 : \text{定数} \quad (\text{A})$$

となることがわかる.

② $D = 0$ のとき, 重解を λ とすると,

$$x(t) = e^{\lambda t}(C_1 + C_2 t) \quad C_1, C_2 : \text{定数} \quad (\text{B})$$

③ $D < 0$ のとき, 複素数解を $\alpha \pm i\beta$ ($\beta \neq 0$) とすると

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \quad C_1, C_2 : \text{定数} \\ x(t) &= K e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi) \quad K, \varphi : \text{定数} \end{aligned} \quad (\text{C})$$

となる.

【単振動モデル (再)】 $\ddot{x} = -\omega^2 x$

$t^2 + \omega^2 = 0$ ($\omega > 0$) は(C) の場合にあたるので, $t = \pm i\omega$ より,

$$x(t) = K \cos(\beta t + \varphi) \quad K, \varphi : \text{定数}$$

すなわち, 単振動 (周期運動) が導かれる.

【減衰振動モデル】 $\ddot{x} = -\omega^2 x - k\dot{x}$

このモデルは定数 k が速度 $\dot{x}$ に比例する空気抵抗があるときの記述となる.

ここでは, 簡単のために $\ddot{x} = -2x - 2\dot{x}$, $x(0) = 1, \dot{x} = 1$ を解いてみる.

解: 特性方程式 $t^2 + 2t + 2 = 0$ を解くと, $t = -1 \pm i$ となるので,

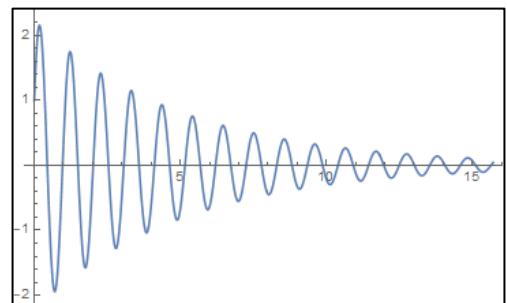
$$x(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \quad C_1, C_2 : \text{定数}$$

初期条件を考慮すると,

$$x(t) = e^{-t}(\cos t + 2 \sin t) = \sqrt{5} e^{-t} \cos(t + \varphi)$$

となる.

$$\text{右図は, } x(t) = e^{-0.2t}(\cos 6t + 2 \sin 6t)$$



【自由落下モデル】 $\ddot{x} = -g$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -g \quad (g \text{ は重力加速度})$$

解：初期条件をそれぞれ、 $\dot{x}(0) = v_0$, $x(0) = x_0$ とすると、1 変数の簡単な積分を繰り返すことで、

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

となり、放物運動が導かれる。

【練習問題】

1 次の微分方程式を解きなさい。

(1) $\frac{dy}{dx} = 2x + 1 \quad (x = 0, y = 1)$

(2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (x = 1, y = 1)$

(3) $\frac{dy}{dx} = 3y \quad (x = 0, y = 2)$

【過去の入試問題より】

1 : $y = e^{mx}$ が $y'' + 2y' - 3y = 0$ をみたすように m を定めよ。

($m = 1, -3$) (東京電機大)

2 : x の関数 y が微分方程式

$$y'' - y = 2 \sin x$$

をみたすものとする。

(1) $y = e^x u - \sin x$ とおくとき、関数 u が満足する微分方程式を求めよ。

(2) $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$ であるとき、 y を求めよ。

(1) $u'' + 2u' = 0$, (2) $y = e^{-x} + 2e^x - \sin x$ (早大理工)

【参考図書】

○微分方程式を数理モデルとして理解するには：

山口昌哉：食うものと食われるものの数学，筑摩書房，1985.

デビッド・バージェス/モラグ・ボリー：微分方程式で数学モデルを作ろう，日本評論社，1990.

○微分方程式を微分積分の延長として復習するには：

稲葉三男：ワンポイント「1 階微分方程式」、共立出版，1980.

小島順：微積分入門（下）、日本評論社，1999.

○微分方程式を正面から復習するには：

斎藤利弥：常微分方程式論，朝倉書店，1967.

木村俊房：常微分方程式，共立出版，1974.

第 18 回 数学教育について

Q：教育はだれのためのものか（次世代の子どもたちへ）

21 世紀も 20 年近くたち、高度情報通信社会（ICT 社会）に生きる次世代にどのような教育を施せばよいか非常に重要な問題であり、難しい問題である。そもそも「教育とはだれのためのものか」、また「だれのために教育はあるのか」という切り口で考えていく。そのためにまず教育の歴史を概観する。

I：歴史に学ぶ（通時態と共時態）

何か物事を追求するときには歴史的視点は非常に有効であり、重要である。このことは社会科学のみならず、自然科学や数学においても同様に成り立つ。教育について考えるとき、現在や未来に視点が向きがちだが、過去を振り返ることは重要である。そして、物事に対して一度は徹底して批判的に見直す作業が求められる。

1 「教育」そして「学校」とは

教育とは「人間形成としての営み（個人、主体概念、近代的理性の自律性）」・・・デカルト、カント
一方、社会学者の E.デュルケム（1922）がこんなことを言っている。

－教育とは「若い世代に対して行われる一種の組織的なし方法的社会化」－

教育の本質：個人的なものでなく社会的な営み

学 校 とは：その営みを実現する装置

・社会化とは

個人が文化（言葉、知識・技能、行動・生活様式、価値・規範等）を身につけ、その社会の成員になっていくことを「社会化」という。

・「社会化」を育むもの

学校、家庭、地域社会、マスメディア等を通した、しつけ、訓練、しきたり、風習、まつり、儀式、労働、遊び等日々繰り返される出来事、体験。

つまり「社会が個人を形成する」か「個人が社会を形成する」は非常に難しい問題である。

※社会学者 N. ルーマン（1929-1998）は教育を社会システム理論による捉えなおしを提案している。
（ミクロ教育学 vs マクロ教育学）

例：子どもをとりまく社会の変化（「社会化」を阻害するさまざまな要因）

- ・少子化（核家族化）
- ・テクノロジーの発達（インターネット、携帯電話、携帯ゲームなどの影響）

2 近代学校の限界（制度面、機能面）そして現代の学校

(1) 19 世紀：国民教育制度（公教育制度）...「国民」をつくるという近代国家の使命（抑圧装置）

中世・・・教会－家族

近代・・・学校－家族

従来の抑圧装置としての国家装置以外に、資本制国家は、子ども時代から、話し方、考え方、行動の仕方までをトレーニングする学校という制度（イデオロギー装置）を主軸として、家族、政党、宗教、メディア、組合などの領域も国民の自発的服従を生み出す「国家のイデオロギー装置」として機能させている。

アルチュセール「イデオロギーと国家イデオロギー装置」から

この流れが、哲学者フーコーの「監視と処罰－監獄の誕生」や、

- (監獄が、学校・工場・病院に似ている・・・管理社会としての近代)
- また、社会学者ブルデューによる「教育の階級再生産論」
- (親の階級的な位置が子どもの教育に引き継がれ、階級構造が再生産される)
- というヨーロッパの社会思想の流れになっていく。
- (2) 20 世紀：大衆化（産業社会の要請、個人の上昇志向）
- 明治時代の立身出世主義、機会の平等の追求
- (3) 現 代：個人の投資、消費としての教育（受験）…私教育へ
- 過熱する中学受験（公立中学への不信感？）
- ほぼ全員が受験する自由度が低い高校受験（差別、選別機能）
- 公立学校の逆襲（学区撤廃、学校選択の自由、中高一貫、受験シフト）
- 学校改革の大流行（新自由主義的学校運営…規制緩和、競争主義）
- 多様化され自由度が高くなった大学受験（付属高、AO・推薦入試、一般入試等）
- ゆとり教育の見直し（基礎学力、規範の向上）
- 教育再生実行会議の議論（2013 年 1 月～）
- 大学入試改革（学力から人物本位へ）、教育委員会制度の見直し、道徳の教科化など

3 新しい学校像（近代学校からの決別）

近代化を支えてきた集団主義的な秩序の制度はさまざまな分野で疲弊し、このことは学校教育にも当てはまる。生徒に基礎学力を保障し、集団生活でのルールを身につけさせるといった従来の学校像は、いまや変革の必要性にせまられている。こどもを社会の進歩や経済の発展を担うためだけの「教育が必要なヒト (homo educandus)」とみるのではなく、家庭や地域やメディアなどさまざまな環境によって学び、経験を広げて生きていく「自ら学ぶヒト (homo discens)」をとらえる必要があるといわれている。しかし、最近では認知科学、進化心理学の観点からの批判的検討もある。

○ヘンティッヒ (Hartmut Von Hentig 1925ー ドイツ) の「経験の空間として学校」

ヘンティッヒはドイツのビートルフェルト大学附属実験学校で長年指導的な役割を担ってきた教育学者だが、彼は、情報化と消費生活化が進行するドイツにおけるこどもたちの生活空間と経験の変貌を分析した結果、情報・消費社会における「新しい学校像」を提案した。少し古い資料だが、いろいろ示唆を受ける点がある。

彼は、「学校という空間は、他者、事物、自然と具体的に＜関わり合い (Umgang)＞ながら、こどもが自己のアイデンティティを獲得していく場」ととらえ、これらをとおして、こどもが、自己の世界の成り立ちを実感的に理解していくと述べる。そして、この＜関わり合い＞に満ちた学校生活を通してこそ、こどもは社会生活を送る「市民 (Civilitas)」までに成長できると述べた。彼のいう「市民性 (Civilitas)」とは、あらゆる事柄について互いに語り合い、聞き合い、共同して問題を解決していくという、生活技法を意味します。もともと、「シヴィリタス」は、ローマの修辞学者クイントリアヌスによると、ギリシア語の「ポリスのなかで市民として共に生活するための能力」のようだ。その上で、かれは「新しい学校像」を次の 5 領域に分けた。

- (1) 自己と他者との関わり合い
- (2) 人と事物との関わり合いー観察する、測量する、比較する、実験する
- (3) 人と事物との関わり合いー遊ぶ、表現する、想像する、創作する
- (4) 自分と「からだ」との関わり合い
- (5) 語られたり、書かれたり、考え出された世界との関わり合い

Ⅱ：戦後教育の歩み（主なもの）

わが国は明治以来、国家の教育への介入の伝統があり、戦後は一貫して文部科学省（旧文部省）が教育の施策を作ってきた。（学習指導要領の法的根拠）

1946年 11月 日本国憲法公布

1947年 3月 教育基本法、学校教育法公布

1948年 4月 新制高等学校発足（高校三原則）

1951年 7月 文部省「学習指導要領一般編（試案）」発行

1958年 10月 小・中学校学習指導要領を官報に告示

1960年代 高等学校進学率の上昇と高校多様化

1977年 学習指導要領改訂（ゆとりと充実）

1984年 9月 臨時教育審議会設置

1987年 8月 臨時教育審議会，最終答申

臨時教育審議会発足（1984 / 9，内閣総理大臣諮問機関）（cf. 中央教育審議会）

・臨教審のねらい

「戦後教育の見直し」国の教育権の復権，中教審への不満，財界の支援

臨調（臨時行政調査会）との関連（国鉄民営化），日教組対策

・第四次答申（主なもの）1987 8/7

個性重視の原則，生涯学習体系への移行，変化への対応（国際化，情報化への対応）

1992年 4月 小学校学習指導要領実施（「生活科」新設）新しい学力観（関心・意欲・態度）

1992年 9月 学校週五日制（月1回）がスタート

1996年 7月 第15期中教審第一次答申（「生きる力」育成，完全学校週五日制）

1997年 6月 第16期中教審「審議のまとめ」（中・高一貫，飛び入学）

1997年 11月 教育課程審議会「中間まとめ」

・学校週五日制 ・公立中高一貫教育 ・教育上の例外措置（飛び級）

・「総合的な学習の時間」の創設（小中高）

2000年 9月 第17期中教審発足（最後の中教審）

2000年 12月 教課審答申「児童生徒の学習と教育課程の実施状況の評価の在り方について」

2001年 1月 文部科学省発足 中央教育審議会改組

2002年 1月 文部科学省「確かな学力向上のための 2002 アピール～学びのすすめ～」

2002年 4月 完全学校週五日制スタート

小・中学校で新学習指導要領開始（総合的な学習の時間創設）学力低下論

2003年 2月 第2期中教審発足（会長 鳥居泰彦氏）

2003年 4月 高校は学年進行で新学習指導要領開始

戦後初の新設教科「情報」（高等学校）

2003年 10月 学習指導要領が上限から最低基準へ

2004年 4月 国立大学が法人化

2005年 2月 第3期中教審発足（会長 鳥居泰彦氏）

2006年 9月 教育再生会議発足（座長 野依良治氏）・・・首相諮問機関

2007年 4月 第4期中教審発足（会長 山崎正和氏）

2007年 11月 中教審初等中等教育分科会教育課程部会「新学習指導要領の審議のまとめ」発表

2008年 1月 「次期学習指導要領等の改善について」の答申（脱ゆとり）

・授業時数の増加，総合的な学習の時間の時数削減，小学校高学年外国語必修

・理数科目の授業時数の増加，高等学校情報科「社会と情報」，「情報の科学」へと再編

2011年 4月 現行学習指導要領実施開始

小学校：2011 年から全面实施 中学校：2012 年から全面实施（一部、2009 年から実施）

高等学校：2013 年から年次進行実施（数学・理科は 2012 年から先行実施）

2017 年 3 月 新学習指導要領告示（主体的、対話的で深い学び）

2020 年 4 月 新学習指導要領実施小学校開始（外国語、プログラミング必修）

2021 年 4 月 新学習指導要領実施中学校開始

2022 年 4 月 新学習指導要領実施高等学校開始

Ⅲ：新制高等学校での数学科の学習指導要領の変遷

1951 年（昭和 26 年）改訂

一般数学（5） 解析Ⅰ（5）→解析Ⅱ（5） 幾何（5）

1955 年（昭和 30 年）改訂

数学Ⅰ（6・9） 数学Ⅱ（3） 数学Ⅲ（3・5） 応用数学（3・5）

1960 年（昭和 35 年）改訂

数学Ⅰ（5） 数学ⅡA（4） 数学ⅡB（5）（ベクトル） 数学Ⅲ（5） 応用数学（6）

1970 年（昭和 45 年）改訂

数学Ⅰ（6）（ベクトル） 数学ⅡA（4） 数学ⅡB（5）（ベクトル） 数学Ⅲ（5）

数学一般（6） 応用数学（6）

1978 年（昭和 53 年）改訂

数学Ⅰ（4） 数学Ⅱ（3）（ベクトル） 代数・幾何（3）（ベクトル） 基礎解析（3）

微分・積分（3） 確率・統計（3）

1989 年（平成元年）改訂

数学Ⅰ 数学 A 数学Ⅱ 数学 B（ベクトル） 数学Ⅲ 数学 C

1999 年（平成 11 年）改訂

基礎数学（2） 数学Ⅰ（3） 数学 A（2） 数学Ⅱ（4） 数学 B（2）（ベクトル） 数学Ⅲ（3） 数学 C（2）

2008 年（平成 20 年）改訂

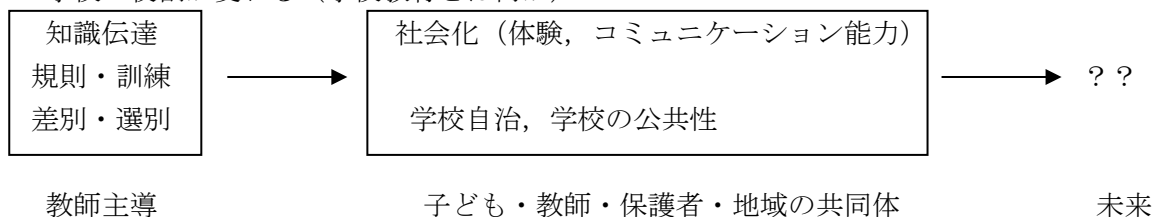
数学Ⅰ（3） 数学 A（2） 数学Ⅱ（4） 数学 B（2）（ベクトル） 数学Ⅲ（5） 数学活用（2）

2018 年（平成 30 年）改訂

数学Ⅰ 数学 A 数学Ⅱ 数学 B 数学Ⅲ 数学 C （ベクトル）

Ⅳ：未来の学校への期待（ICT の影響と可能性）

1 学校の役割が変わる（学校教育とは何か）



2 未来の学校、未来の教育へ（ICT との関係）

・学校生活環境は・・・

・学習環境や授業形態は・・・

例 知識獲得型から問題発見・解決型へ（how to から why）

・人間のものの考え方、行動の様式は・・・

※反転授業（Flipped Classroom）：

説明型の講義をオンライン教材化して宿題にし、従来宿題であった応用課題を教室で対話的に学ぶ

授業スタイル. 米国の小・中・高等学校を中心に広がり始めている.

※アクティブラーニング (Active Learning) :

「能動的な学習」のことで, 授業者が一方的に学習者に知識伝達をする授業スタイルではなく, 課題研究や PBL (プロジェクト・ベースド・ラーニング), ディスカッション, プレゼンテーションなど, 児童生徒の能動的な学習を取り込んだ授業.

【教師に対する十戒】 (by George Polya)

- 1 自分の科目に興味を持ちなさい.
- 2 自分の科目について知りなさい.
- 3 学習方法を知ること: 学ぶことの最良の道は, 自分で発見すること.
- 4 生徒の様子を知るように努めなさい, そして自らを彼らの立場に置いて彼らが何を期待し何が困難かを知るように努めなさい.
- 5 彼らには知識だけでなく、いかに解くか, どのような心持ちをもつか, そして一定の解法の習慣が身につくようにしなさい.
- 6 推測させなさい.
- 7 証明させなさい.
- 8 いま手がけている問題に対して, 今後出会う問題を解くとき有用だろうと思われる特徴を見つけさせなさい—現在の具体的状況の背後にある解法の一般的パターンを見出すように努めなさい.
- 9 問題の解法についてすべて一度に糸口を示してはいけません—あなたが言う前に生徒に推測させましょう—出来るだけたくさん生徒に発見させることが大切です.
- 10 生徒に無理やり教えるのではなく, 彼らが思いつくようにしなさい.

(「数学の問題の発見的解き方 2」より)

【参考文献】

- G. ポリヤ: 「数学の問題の発見的解き方 1」, みすず書房, 1967.
G. ポリヤ: 「数学の問題の発見的解き方 2」, みすず書房, 1967.

第 19 回 ICT の活用

I : 教育と技術（テクノロジー）の歴史から

- 1 文字の発明（紀元前 4000 年後期）（口承伝達 → 文字伝達へ）
cf. ユークリッド原論：点とは部分をもたないものである。線とは幅のない長さである。…
- 2 紙の発明（紀元前 2 世紀頃）中国の蔡倫が改良（105 年頃） → 書籍，ノート
それ以前は，パピルス，羊皮紙，粘土板，木簡・竹簡など
- 3 視聴覚機器（カメラ，蓄音機，レコード再生機など）の発明
→ 視聴覚教材（写真，映像ビデオ，音楽レコードなど）
- 4 コンピュータ＋ネットワークの発明
→ マルチメディア教材，双方向，対話的授業
- 5 AI（Artificial Intelligence）＋Robotics の発明
→ ？

II : テクノロジーが教育をどのように変えるか・・・未来の学校は？

- 1 学校の役割（学校教育とは何か）（The role of the school）
- 2 教師の役割（教授スタイル）（Innovative teaching for teacher）
e.g. Flipped Classroom, Active Learning
- 3 児童生徒（学習スタイル）（Innovative learning for student）
・学習環境、授業形態、教科書、教材など
e.g. Digital learning resources, Digital textbooks

III : 最近の教育事情

- 1 諸外国では・・・
 - ・アメリカ(U.S.A.)
 - ・ The Partnership for 21st Century Skills (U.S.A.) <http://www.p21.org/>
keyword : Critical thinking, Problem solving, Communication & Collaboration.
 - ・ Apple の教育事例 : <http://www.apple.com/jp/education/profiles/>
例：ストリングセオリースクール
 - ・ヨーロッパ (EU)
 - ・ PISA (OECD, EU) <http://www.oecd.org/pisa/>
keyword : Reading, Mathematical & Science literacy, Problem solving.
- 2 日本では (AI の活用)
 - ・ Qubena (河合塾など) <https://www.kawai-juku.ac.jp/highschool/qubena/>
 - ・ atama+ (Z 会など) <https://www.atama.plus/>

IV：ICT の教育利用におけるいくつかの考え方

1 インストラクショナルデザイン（教授方法）

インストラクション・・・意図的な学習を支援する事象の集合体

具体的には、教材の選択、学習者の準備状況の見極め、授業の時間管理、教授活動のモニターなど

(1) ICT を活用した授業設計のモデル・・・インストラクションの外的事象（by Robert Gagne）

例：教授事象に沿った授業展開例

教 授 事 象	方法／メディア	指 導 内 容
1 学習者の注意を喚起する	授業者 or スライド	
2 学習者に目標を知らせる	授業者	
3 前提条件を思い出させる	板書、配付資料、スライド	
4 新しい事項を提示する	配付資料、スライド	
5 学習の指針を与える	配付資料、スライド、自己評価表	
6 練習の機会を与える	ワークシート	
7 フィードバックを与える	授業者、学習者	
8 学習の成果を評価する	クイズ、自己評価表	
9 保持と転移を高める	授業者、ワークシート	

- ・教授事象：人間の情報処理の内的段階における流れに基づく．外的事象が目的とすることは、人の内的な情報処理を促すことであり、順序よく提示することが望ましい．
- ・方法／メディア：授業者の説明、板書、スライド、ビデオ、ワークシート、配付資料、クイズ、グループ活動、モバイル PC など
- ・指導内容：各学習に対する指導のステップ

(2) ICT 活用での学習者の視点（どのように変化）

- ・何を学ぶのか ・どのように学ぶのか ・いつ、どこで学ぶのか

(3) ICT と学習者の規模（どのように対応するか）

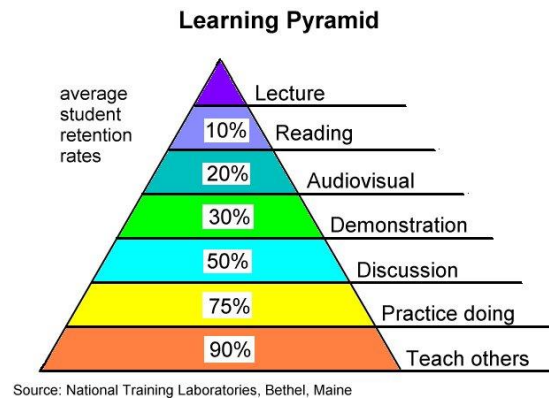
- ・個別指導（1 対 1） ・協働学習、ディスカッション（3～8 名） ・講義（9 名～）

(4) ICT と学習のスタイル（学習者の個性を考慮）

- ・視覚的言語的学習スタイル
- ・聴力的言語的学習スタイル
- ・視覚的非言語的学習スタイル
- ・触覚的運動感覚的学習スタイル

2：学習ピラミッド (Learning Pyramid)

これはアメリカの National Training Laboratories の研究成果に基づいた学習定着率の割合を示す図として有名である。確かに説得力のある結果ではあるが、一方で根拠が脆弱であり理論的ではないと理由で批判されることも多い。



出典：National Training Laboratories.

3 ラーニングアナリティクス (Learning Analytics)

これは「学習・教育におけるデータ解析方法やアプローチ」を指す。すなわち、学習に関する「学習ビッグデータ」を収集・分析して、学習・教育に活用しようとする取り組みのこと。

LMS (Learning Management System), eポートフォリオ, MOOCs (Massive Open Online Courses) などの導入に伴い、大量の学習ログデータが蓄積されるようになった。それに伴い、それらのデータの分析によって、学習・教育を支援する取り組み。具体的には、

- ① 教育・学習データの取集・蓄積
- ② データの分析
- ③ 学習者・教授者へ分析結果のフィードバック
- ④ 評価・改善

というサイクルで実施する。

4 オープンエデュケーションとは (Open Education) …教育のオープン化

オープンエデュケーションとは、教育を学校や大学など教育機関の枠を超えて「オープン」にすることを指す。このようなオープンエデュケーションの概念が主流となったのは、2000年代後半から盛んになり、教師から生徒への一方向的な管理教育を改善することを目的に、教室と教室の境目をなくし、生徒の興味を重視する学習者中心の教育活動が行われた。近年ではネットワークやテクノロジーを活用し、教育を受ける機会をより「開かれたもの」にする活動のことを指す。すなわち、オープンエデュケーションから見直す「教育」の視点として、

- ・学校という（社会的装置としての）モノ、
- ・教科書というモノ、
- ・教師というヒト

の再検討が必要になり、今後は、

- ・従来の教育（特に近代教育）の見直し、
- ・オープンエデュケーションの可能性の追究

の視点で課題を探ることが重要になる。

cf. オープンエデュケーションリソース (Open Educational Resources とは)

MOOCs, MERLOT (<https://www.merlot.org/merlot/index.htm>) など

V : ICT の授業への活用

1 教室環境（普通教室、PC ルーム）

PC, モバイル端末, プロジェクター, ネットワーク環境

2 使用教材

数学用ソフトウェア（後述）, EXCEL, PowerPoint など

3 ICT を授業にとりいれる場面設定

- ・基礎学力を養成する
- ・協働学習を展開する（コミュニケーション能力と調査能力）
- ・授業の導入に用いる（児童生徒の興味関心を喚起）
- ・理解を深め、思考を深化させる（思考力の育成）
- ・発表する（コミュニケーション能力の育成）

4 ICT を教育活動に活用する場面例

- ・e-ポートフォリオ・・・電子学級日誌, 電子校務日誌の教育の情報化推進
- ・e-learning (skype, Video 会議システムなど)・・・グローバル人材育成などを目的に国際交流, 児童生徒の大学諸機関との交流など
- ・教育におけるクラウド環境の可能性と課題
Moodle, Classi, Azure, Box, ロイロノートなど

5 デジタル教材の作成

ICT 活用のもっとも有効なことはデジタル教材の作成である.

(1) コンテンツ化の方法

Application Software 利用 vs Web コンテンツ化

(2) Web コンテンツ化の例（授業時提示用, 自宅学習用）

例 : <http://www.f.waseda.jp/takezawa/math/>

例 : YouTube - wasedarisu

(3) 数学ソフトウェア利用の例

- ・Mathematica（高機能で高額）
- ・Geogebra（幾何学専用フリーウェア）
- ・Excel（グラフ、サイコロ、円周率のシミュレーションなど）
- ・R 言語（統計用フリーウェア）

6 ICT 授業例（ビデオ）

第 20 回 コンピュータで数学を I (Mathematica での実習)

【Mathematica で数学を】

Mathematica は、1988 年に Stephen Wolfram らによって開発された数学・物理や科学技術のための総合的なソフトウェアである。数値計算、記号処理、グラフィックス、プログラミング言語としての機能を備えている。Mathematica はカーネルと呼ばれる計算を受け持つ部分とフロントエンドと呼ばれるユーザーインターフェースを持つ。Mathematica は「数学統合ソフトウェア」として ver3.0 以降、入出力のインターフェースが改善され、日本語化にも対応し、学校教育現場においてもかなり使いやすい環境を提供している。実際には Mathematica の Notebook で実習を行うが、以下でのその概略を記述する。

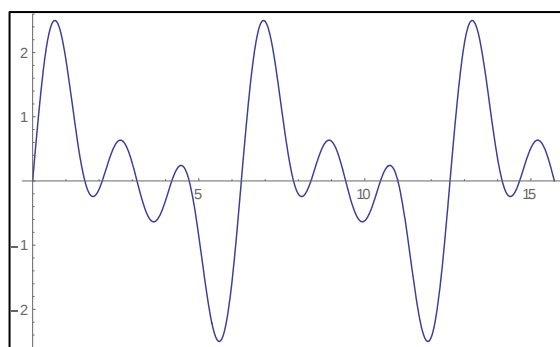
1 : いろいろな曲線

○基本作図

```
Plot[Sin[x], {x, -4 Pi, 4 Pi}]
```

○パラメータ表示 (サイクロイドを例に)

```
ParametricPlot[  
  {{Cos[t] - 1, Sin[t]}, {t, Sin[t]}},  
  {t, 0, 2 Pi}  
]
```



○三角関数の合成

```
Plot[  
  {Sin[t] + Sin[2 t] + Sin[3 t]},  
  {t, 0, 5 Pi}  
]
```

○関数からサウンドを作成

```
Play[0.06 Sin[180000 t] + 0.02 Sin[360000 t] + 0.01 Sin[540000 t], {t, 0, 1}]
```

○円周率のサウンドを聴く

```
pi = RealDigits[N[Pi, 10000]] // Flatten;  
ListPlay[pi]
```

○極座標

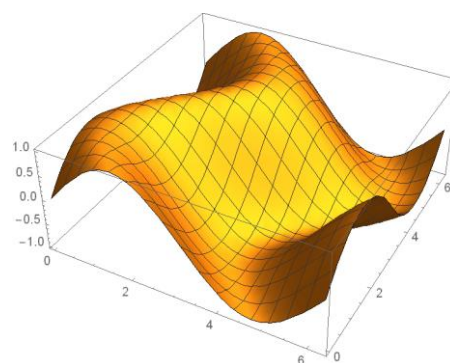
```
polarlimacon[a_, b_, n_][t_] := a Cos[n t] + b  
PolarPlot[Evaluate[polarlimacon[2, 1, 1][t]], {t, 0, 2 Pi}]
```

2 : いろいろな曲面

○基本作図

```
Plot3D[  
  Sin[x + Sin[y]], {x, 0, 2 Pi}, {y, 0, 2 Pi}  
]
```

このあと、さまざまな曲面を描く実習を行う。



3 : プログラミングによる課題探究

3-1 Collatz 問題 (3n+1 問題)

この問題は古くから知られている問題で次のようなものである.

「ある自然数を考える.これが偶数のときは半分にし,奇数のときは3倍して1足す」

このようにして自然数列を定義する.すると, この数列が非常に不思議な振る舞いをすることに気づく. これを Mathematica で確認する.

○基本定義

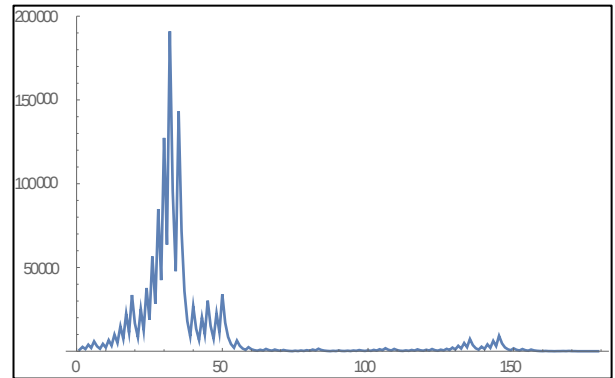
```
next[i_?OddQ] := next[i] = 3i + 1
```

```
next[i_?EvenQ] := next[i] = i/2
```

```
collatz[i_] :=
```

```
FixedPointList[next, i, SameTest  
-> ((#2==1)&)]
```

この定義後, さまざまな自然数に対する振る舞い
(常に特定なループに入る) を実験観察する.



3-2 タートルグラフィックス

ここでは, Mathematica をもちいて LOGO の環境を構築してタートルグラフィックスを体験する.

○LOGO の定義

```
initial[start_:{0,0}] := (X = start; U = {1,0}; path = {X})
```

```
right[a_] := U = {{Cos[aa = a Degree/N], Sin[aa]}, {-Sin[aa], Cos[aa]}}.U
```

```
left[a_] := U = {{Cos[aa = a Degree/N], -Sin[aa]}, {Sin[aa], Cos[aa]}}.U
```

```
forward[s_] := AppendTo[path, X += s U]
```

```
back[s_] := AppendTo[path, X -= s U]
```

そして,pathのリストを作成後,Line文で線分を描く

```
Showturtlepath := Show[  
Graphics[{Thickness[0.02], RGBColor[1, 1, 1], Line[path]}  
],  
PlotRange -> All, AspectRatio -> Automatic  
]
```

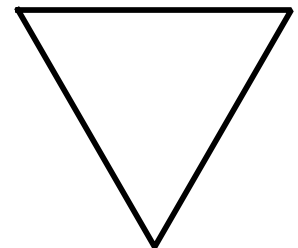
○正三角形を描くコマンド

```
initial[]; right[60]; forward[1]; left[120]; forward[1]; left[120];  
forward[1]; showturtlepath
```

この命令は, 次の手順になる.

右 60 度 : 前へ 1 : 左 120 度 : 前へ 1 : 左 120 度 : 前へ 1

この実行結果が右図である.



3-3 フラクタル図形

ここでは LOGO の環境下において, 再帰的なプログラミングをもちいてさまざまな自己相似形を描く.

○コッホの曲線の定義

```
koch[length_,0] := forward[length];
```

```
koch[length_, depth_] := (
```

```
    koch[length/3, depth-1]; left[60];
```

```
    koch[length/3, depth-1]; right[120];
```

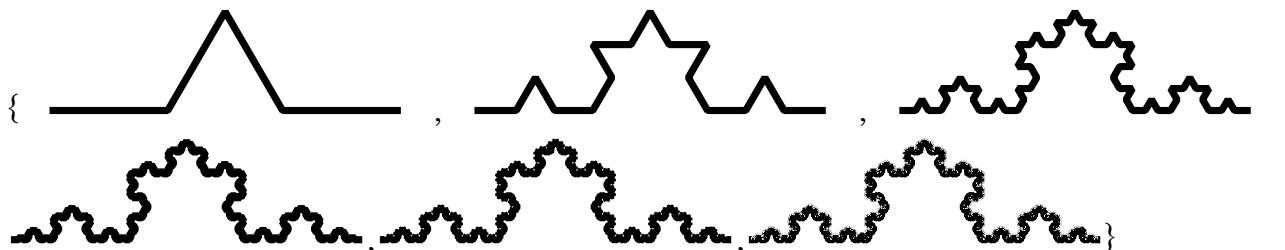
```
koch[length/3, depth-1]; left[60];
```

```
koch[length/3, depth-1];
```

そこで、この描画を6回繰り返すと下のような自己相似形（コッホの曲線）が描ける．

```
snow[n_] := (initial[]; koch[1., n]; right[120]; showturtlepath)
```

```
Table[snow[i], {i, 1, 6}]
```



定義の角度を変化させると、下のような自己相似形が出現する．

```
koch2[length_,0] := forward[length];
```

```
koch2[length_,depth_] := (
```

```
  koch2[length/3, depth-1];left[90];
```

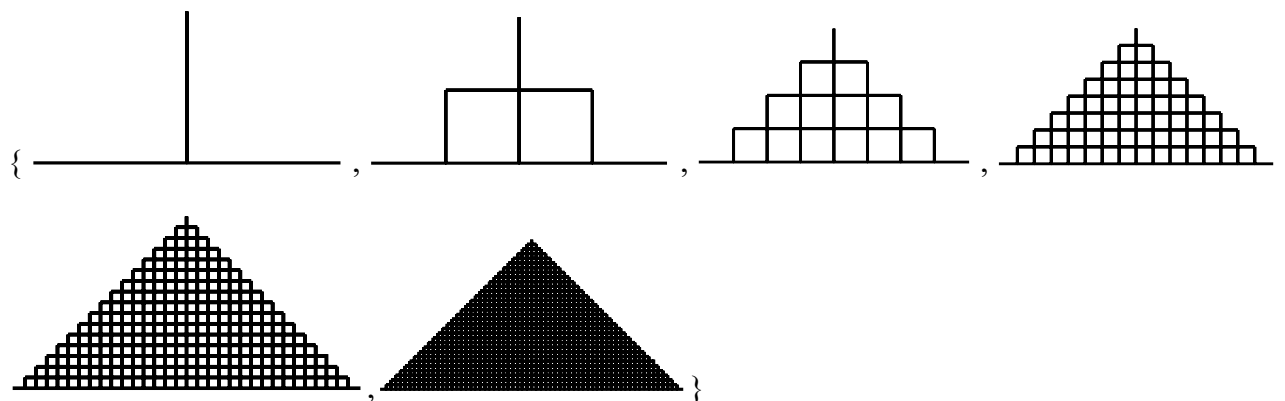
```
  koch2[length/3, depth-1];right[180];
```

```
  koch2[length/3, depth-1];left[90];
```

```
  koch2[length/3, depth-1]);
```

```
snow2[n_] := (initial[]; koch2[1.,n]; right[120]; showturtlepath)
```

```
Table[snow2[i], {i, 1, 6}]
```



【演習】

いろいろな自己相似形を作成しよう．

【Wolfram Alpha について】

【参考文献】

小島順，武沢護他：Mathematica その無限の可能性・基礎編，実教出版，2001.

J.W.Gray：Mastering Mathematica, Academic Press,1994.

小島順監訳，時田節，武沢護訳「Mathematica 方法と応用」，サイエンス社，1996.

A.Gray，：Modern Diffrential Geometry of Curves and Surfaces,CRC Press,1993.

小島順監訳，武沢護訳「Mathematica 曲線と曲面の微分幾何」，トッパン，1996.

第 21 回 コンピュータで数学を II

－幾何を Geogebra＋統計を EXCEL での実習－

【Geogebra】（幾何学ソフト；フリー：2 次元，3 次元幾何学）…Web クラウド版

1：2 次元幾何学

初等幾何学ではコンピューターソフトの活用が効果的である．射影幾何の誕生に深いかかわりのある「パスカルの定理」と「パップスの定理」を例に取り上げよう．

〈パップスの定理〉

直線 l_1 ， l_2 上にそれぞれ 3 点 A_1, B_1, C_1 ， A_2, B_2, C_2 がある．

このとき，直線 A_1B_2 と直線 B_1A_2 の交点を P_1 ，直線 A_1C_2 と直線 C_1B_2 の交点を P_2 ，直線 B_1C_2 と直線 C_1B_2 の交点を P_3 とする．

このとき，3 点の P_1, P_2, P_3 は一直線上にある．（図 1）

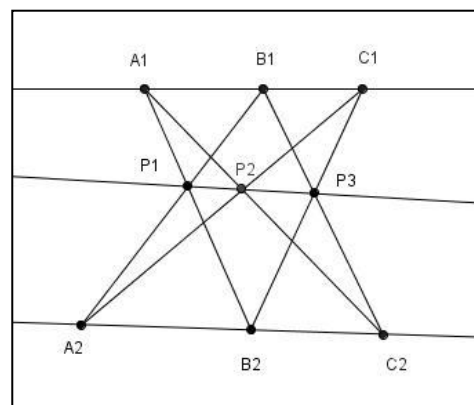


図 1

〈パスカルの定理〉

円または円錐曲線に内接する六角形 A, B, C, D, E, F の相対する辺 AE と BF ， AD と CF ， CE と BD またはその延長の交点 G, H, I は 1 直線上にある．

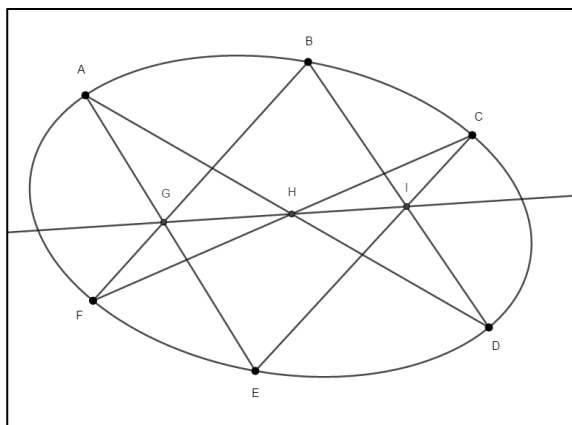


図 2

マウス操作
⇒ ⇒

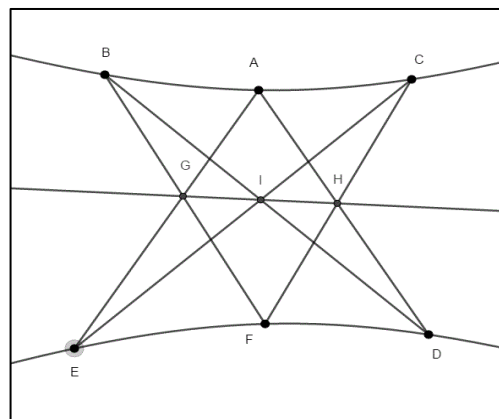


図 3

パスカルの定理では，二次曲線を二直線と読み替えることで，パップスの定理になる．

このパスカルの定理での二次曲線は楕円(図 2)や双曲線(図 3)においても成立することは，Geogebra を使うと直観的な理解へ効果的である．

2 3 次元幾何学

Geogebra では 3 次元幾何学も対応している．

【Excel で数学】

I : シミュレーション

1 : 円周率のシミュレーション (モンテカルロ法) (再計算…Fn+F9 for Mac)

2 : サイコロのシミュレーション (EXCEL のマクロ利用)

EXCEL のマクロ機能 (VBA)

3 : 乱数の発生

関数 : RND()

II : グラフの描画

1 : 関数のグラフ

2 : パラメータ表示 (新課程 : 数学 C)

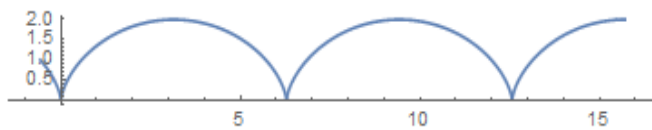
○2 次曲線

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad \text{だ円}$$

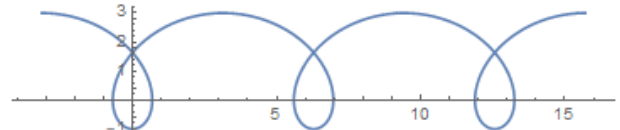
$$\begin{cases} x = a \cosh t \\ y = b \sinh t \end{cases} \quad \text{双曲線}$$

○サイクロイド(cycloid)

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$



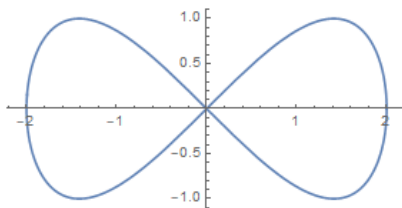
サイクロイド ($a = b = 1$)



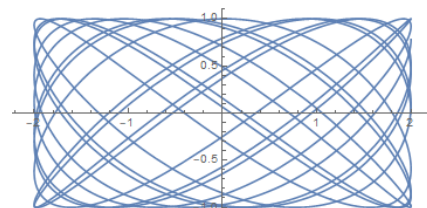
トロコイド ($a = 1, b = 2$)

○リサージュ曲線 (Lissajous)

$$\begin{cases} x = a \cos m t \\ y = b \sin n t \end{cases} \quad m : n \text{ が有理数の時は周期運動, 無理数の時は長方形内を密に運動.}$$



リサージュ ($a = 2, b = 1, m = 1, n = 2$ の時)



($a = 2, b = 1, m = 1, n = \sqrt{2}$ の時)

Ⅲ：EXCELによる簡単な統計処理（新課程：数学Ⅰ，数学Ⅱ）

1 データの代表値とは

■SUM（セル範囲） AVERAGE（セル範囲） VARP（セル範囲） STDEVP（セル範囲）

合計 =SUM（A1：A10）

平均 =AVERAGE（A1：A10）

分散 =VAR.P（A1：A10）（variance） cf. VAR.S（A1：A10）

標準偏差 =STDEV.P（A1：A10）（standard deviation） cf. STDEV.S

$$\text{分散 } v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \quad \text{標準偏差 } \sigma = \sqrt{v}$$

【偏差値の計算】

$$\text{偏差値} = \frac{x - m}{\sigma} \times 10 + 50$$

と計算する。xはその人の点数。この数値が意味をもつのは正規分布の時である。

■度数分布表の作成（EXCEL_Mathシートを使用）

【EXCELのコマンド】 =FREQUENCY(検索セル範囲，参照セル範囲)

【手順】：マウスで出力したいセルを選択（N4：N23をドラッグ）

関数のFREQUENCYのウィザードを選択

データ配列 J3：J32（マウスでドラッグ）

区間配列 M4：M23（マウスでドラッグ）

Shift+CtrlでEnter（もしくはOK）

入力結果：{FREQUENCY(J3：J32, M4：M23)}

■評価表の作成

【EXCELのコマンド】

=VLOOKUP(検索セル値，検索セル範囲，左端からの列数，検索の型)

検索の型：0 → 検索値と一致する値を出力

0以外 → 検索値が一致しない時は，検索値未満の一番近い値を出力

【手順】

=VLOOKUP(J3, \$M\$29:\$N\$33, 2, 1) ←K3に入力あとはコピー

■並べ替え（sort）

EXCELにはデータを並べ替える機能があり，非常に便利である。

タイトル含め範囲選択 → メニューのデータ → 並べ替え → 最優先されるキーを選択 → 昇順または降順を選択する。

【演習】平均点の高い順から並べよ。また平均点の低い順に並べよ。

また，平均点の高い順で数学の点の良い順に並べよ。

■フィルタ機能

EXCELにはフィルタ機能もあり，これも非常に便利である。

フィルタしたいセル選択 → メニューのデータ → フィルタ → 適宜，「数値フィルタ」「テキストフィルタ」を選択

【演習】三中の男子を選べ。国語が40点以上の女子は何人いるか。

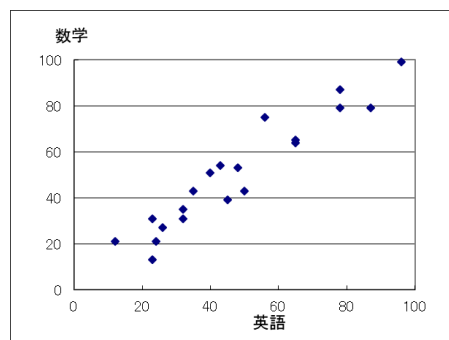
また，国語が40点以上かつ数学が50点以上の生徒は何人いるか。

IV：多変量解析の初歩（EXCEL を利用）

1 相関関係（correlation）

一つの変数のデータを分析するだけでなく、複数のデータに関する関係を分析することも有効である。

ここでは、右図のような英語と数学の得点の例に、相関関係をどのように数値化するか見ていこう。



【手順】

- (1) EXCEL で散布図をかく（データの範囲を選択して、挿入→グラフ→散布図を選択）
その後、グラフのレイアウトで色々調整する。
- (2) 正の相関、負の相関、無関係を数値化する。（相関係数：correlation）

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_i - m_y) \quad r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_x)(y_i - m_y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

共分散

相関係数

ただし、 m_x, m_y ：x,y の平均、 n ：総数、 σ_x, σ_y

すると、計算により $-1 \leq r \leq 1$ となることが分かる。（内積に似ている）

r : -1 —————→ 1
 強い負の相関 弱い負の相関 相関なし 弱い正の相関 強い正の相関

【EXCEL のコマンド】 CORREL(配列 A, 配列 B)

2 回帰分析

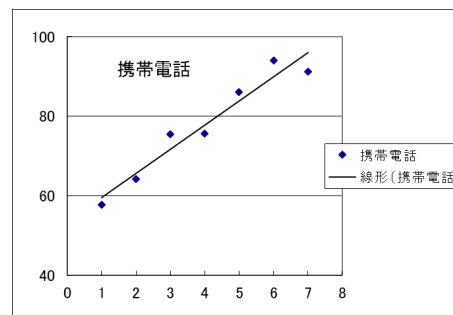
現在のデータをもとにして、将来のデータの予測をすることは社会の中ではよくあることである。ここでは、いくつかのモデルを用いて簡単な予測をしてみよう。

- ・ 決定論的因果関係（微分方程式）
- ・ 非決定論因果関係（確率的）

決定論的な方法としては、

- ・ 直線で予測する
- ・ 曲線で予測する

この二つが代表的である。



例えば、時間（説明変数）の変化に伴って、ある値（目的関数）が変化していく様子を、関数の形で関係づけて分析することを回帰分析（Regression Methods）という。

- (1) 直線で予測する（回帰直線）…単純な回帰分析は直線で近似する線型回帰である。

【EXCEL でグラフ作成】

範囲を選択して、挿入→グラフ→折れ線グラフを選択。

【近似曲線を追加】

グラフを選択 → 右クリック → 近似曲線の追加

→ 種類 または オプションを選択 (いろいろな近似が選択できる)

(2) 曲線で予測する

(ア) 指数関数で近似 (指数回帰)・・・急激な増加の予測

人気歌手の CD 売り上げ, 人口増加

(イ) 対数関数で近似 (対数回帰)・・・頭打ちの場合の予測

一発芸のタレントの人気, 人口増加

(ウ) 多項式で近似 (多項式回帰)・・・複雑な動きの予測

V : EXCEL による検定 (前期の lec9-10 の採録) (新課程 : 数学 B)

検定と推定の考え方

統計の難しい計算はともかく, 統計の非常に有効な考え方に検定と推定がある. この基本的な考え方は, 一を調べて十を知ることである. すなわち, あるデータ (標本) が与えられた時, そこから全体集団 (母集団) の様子のある幅をもって推測したり, そのデータから創り出した仮説が正しいか, 正しくないかを検定したりすることを, 確率や確率分布の知識を用いて行うことである. 以下では, 母集団は正規分布に従うものとして話を進める. (例: PISA 調査)

(1) 検定の例

例: コインを 100 回投げ続けたとき, 60 回表が出たという. このコインは正常なコインといえるか.

(解説) 帰無仮説「正常である確率 0.5」という仮説を立てて検定することになる. 一定の計算の結果として有意水準 5% で仮説は棄却される (つまり, 正常とはいえないサイコロと判断する).

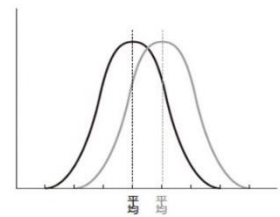
(2) 平均の差の検定 (2 変量の平均の検定として)

平均の差の検定は, 2 変量では t 検定, 3 変量では分散分析で行う.

「対応のある t 検定」・・・独立した 2 群の比較

「対応のない t 検定」・・・同一群での事前・事後などの比較

「等分散」と「分散が等しくない」でも分析が異なる.



(3) 推定の例

例題: ある大学の学生 10 人の体重を計測したところ, 次のデータを得た. この大学の学生全体の体重の平均と分散を 90% の信頼率で推定せよ.

(解説) この標本平均: 71.92 標本分散: 10.26 とする.

母分散の推定は, χ^2 乗分布を用いて, 5.4~27.78 と推定できる (信頼率 90%)

母平均の推定は, t 分布もしくは F 分布を用いて, 65.5~74.2 と推定できる (信頼率 95%)

VI : アンケートの分析 (クロス集計) … ピボットテーブルの利用

第 22 回 教育評価について

I：教育評価について（対象としての学習者）

目 標：学習者個人の成長や発達

種 類：形成的評価と総括的評価

歴 史：口頭試問 → 筆記試験 → 客観試験 → ？

例：科举（門閥打破と実力主義）

課 題：評価の客観性 vs 教育的妥当性

II：様々な形態の評価（パフォーマンス課題を例に）

1 パフォーマンス課題とは

教育の場面においては、数学の試験のように非常に客観性の高いものではなく、小論文、レポート、課題作品、スピーチやプレゼンテーション、体育実技、芸術実技など様々な知識や技能を活用することを求めるような複雑な課題を指す。就職の面接などもこの例になる。

2 パフォーマンス評価

パフォーマンス課題に対する評価方法のことを指し、客観テストによる数値評価ではない。学習ポートフォリオやルーブリックなどが代表的である。知識・技能に関しての客観テストやチェックリスト法と併用されることが多い。

3 評価に関する落とし穴（主観的な歪み）

(1) 評価者間の観点と基準の相違

(2) 被評価者への対人認識の歪み

・ステレオタイプ

属している集団の特性や何らかの行動や態度のきっかけでレッテルを貼ってしまうこと

例：津田生なら仕事を任せても大丈夫

例：数学科出身者なら、情報科学科出身なら・・・

・ハロー効果（Halo effect）

ある顕著な特徴に引きずられて他の特徴の評価が歪められること

例：日頃の生活態度の良さを成績の評価に反映してしまう

・寛容効果（Generosity effect）

好ましい特徴をより好意的に、そうでない特徴には寛大に評価すること

例：単位を落としそうな学生に評価が甘くなる

例：「マイルストーン」によく書かれない

第 23 回 模擬採点

【演習】

4 種類の数学の答案を、各自が採点基準を定め採点し、その結果（点数の分布）を受講生同士で比較する。

○ねらい：

数学の採点基準の違いを体験する。

第 24 回以降 マイクロティーチング実習

通常授業に比べて小人数で、授業内容も縮小して 5 分～10 分程度の授業を行うことによって、特定の教授スキルを実習し訓練することができる訓練方法。教育実習生が教育現場で教える前に行うことに有効と言われる。

【演習】

高校生にとって理解しにくい内容（定理の証明、単元の導入など）、またはつまづきやすいトピック、説明に工夫を必要とする問題（教科書の問題もしくは過去の入試問題）を取り上げて説明をする。

- ・時 間：1 人 5～6 分程度
- ・方 法：板書説明（PC でのスライド説明も OK）
- ・対象科目：数学 I，数学 A，数学 II，数学 B
- ・対象トピック：下記 A タイプ，B タイプ

A タイプ：定義や定理の導入（例）

○導入の説明

数学 I：2 次関数のグラフ，2 次不等式，三角比，分散・標準偏差

数学 A：順列・組み合わせ，重複組み合わせ，確率（条件付き確率）

数学 II：複素数，解と係数の関係，三角関数，三角関数の合成，指数関数，対数関数，微分，積分

数学 B：ベクトル，数列，漸化式，数学的帰納法

○定理の証明：

正弦定理，余弦定理，加法定理など

B タイプ：問題の解説（高校生がつまづきやすいやや難しい問題など）（例示）

○教科書にある例題，大学入試問題など