
* 報 告 *

教職大学院での数学科教育法 実践例

－課題研究「中等教育ならびに大学教職課程のカリキュラムに関する実践研究」の中間報告－

相 洋 高等学校 青木 栄成
早稲田大学高等学院 武沢 護
台東区立柏葉中学校 永井 信一
渡辺 暁生

0 はじめに

カリキュラム・学習指導法分科会では、いままでのカリキュラムに関する研究の成果をふまえ、現在は「中等教育ならびに大学教職課程のカリキュラムに関する実践研究」として、特に数学教員を目指す学生に対応するカリキュラム開発を検討してきた。これらの成果を踏まえ、今回はまず教職大学院における取り組みについて報告する。この教職大学院での取り組みは、教職課程における学部生を対象とする「数学科教育法」と異なり、すでに教員免許状を取得し教員を第一志望とする学生を対象にした「数学科教育法」の実践事例である。

1 教職大学院のねらいとカリキュラム上の問題点

2006年7月中央教育審議会の「今後の教員養成・免許制度の在り方について」により、学部教職課程の改革、教員免許更新制の導入、教職大学院の創設が答申された。これを受けて2007年3月に文部科学省が教職大学院の設置基準を公表し、2008年4月に早稲田大学も教職大学院（大学院教職研究科）を開設した。ここでは専任教員（実務家教員）の立場で、教職経験がなく入学した数学教員志望の大学院生に関する教育内容、とりわけその取組と問題点を指摘したい。

2 教職大学院とは

2-1 設置の背景とそのねらい

専門職大学院の一つとしての教職大学院は、

・各教員に求められる資質、能力の高度化

- ・量および質の確保の必要性
- ・教員構造の変化

に対応するために設置された。そのねらいとして、

- ・実践的な指導力を備えた新人教員の養成
- ・現職教員を対象にスクールリーダーの養成

が中心である。設置の基準の概要は次のようになっている。

- ・修業年限：原則2年
- ・修了要件：2年以上在籍し、45単位以上修得（うち10単位以上は学校を活用した学校に関する教育実習とする）
- ・教員組織：実務家教員4割以上
- ・教育課程：体系的に開設すべき授業科目の領域（5領域）を設定

ねらいとしては、実践的な指導力を備えた新人教員の養成また現職教員を対象にスクールリーダーの養成を目的としている。教育課程としては体系的に開設すべき授業科目の領域（5領域）を共通科目群として設定することになっている。

○共通科目

- 1 教育課程の編成・実施に関する領域
- 2 教科等の実践的な指導方法に関する領域
- 3 生徒指導・教育相談に関する領域
- 4 学級経営・学校経営に関する領域
- 5 学校教育と教員の在り方に関する領域

○分野別選択（例）・・・教科教育・生徒指導・学級経営

○学校における実習（10単位以上）

から構成される。しかし、実際のカリキュラムでは授業力向上のための授業科目は設置されているものの、各専門の教科に関する授業科目は設置されていない。これはもともとの文部科学省の設置基準に原因しているが、教職大学院の学生にとって教科の専門性を向上させる上では致命的な欠陥となっている。

3 教職大学院における自主的な取り組み・・・授業力向上のための数学科教育法

そこで今回、われわれ分科会での様々な取り組みをもとに、筆者の一人が実施した教職大学院での実践事例を紹介する。

半期：14回 対象：教職研究科 理科，数学系学生

形態：講義＋模擬授業

3-1 基本的な考え方

実際の授業場面を想定した内容ではなく、授業者が自分の数学的背景を踏まえた上で授業展開可能になるようなテーマを設定した。その上で、授業力を向上させる意味での次のような視点をおいた。内容として

- ・一貫性と関連性を意識した授業展開
- ・数学の歴史を意識した授業展開

方法として

- ・疑問から生まれる授業展開
- ・ICT の活用を前提とした授業展開
- ・数学実験を取り入れた授業展開

【テーマ】

第1回：イントロ（数学の歴史）、角について

第2回：積分とは、そして積分の歴史（面積から積分まで）

第3回：面積・体積指導について（小学校から高等学校までの指導の場面）

第4回：関数から微分の歴史（小学校の正比例から微分積分の基本定理まで）

第5回：円周率 π の話題（円周率とは、実験で求める円周率、無限級数での円周率）

第6回：虚数 i の話題（自然数から複素数まで、数の体系）

第7回：自然対数の底 e の話題（実験で求める e 、世界で最も美しい公式、オイラーの公式）

第8回：小学校の正比例から高等学校の一次変換まで

第9回：数の拡張としてのベクトル

第10回：集合と論理（いろいろなパラドックス、命題論理と述語論理、数学的帰納法）

第11回：確率とそのパラドックス

第12回：統計の話題

第13回：整数の話題（素数、完全数、友愛数など不思議な数）

第14回：実験数学（席替え問題を例に）

3-2 授業展開例

【疑問から生まれる授業展開例】（第2回）・・・積分の話題から

児童生徒は算数・数学の事柄にさまざまな素朴な疑問を持っている。このような疑問を尊重し、この疑問から出発する授業を展開することは重要である。

次の例は実際に筆者らが経験した生徒からの疑問の一部であり、このような事例を集約し授業展開に活かす必要性があると感じた。

- ・ 長方形の面積はなぜ「縦×横」なのか？
- ・ 面積の定義は？
- ・ 日本の国土の面積はどうやって測る？
- ・ 積分でなぜ面積が求まる？
- ・ 微分は接線，積分は面積．一方で，微分と積分が逆演算．接線と面積は逆の概念？

このように，児童生徒の疑問から発する授業展開例は重要と考え，今後蓄積する予定である．

【一貫性に着目した授業展開例】（第3回）

これは，面積・体積指導を通して小学校・中学校・高等学校としての「一貫性」に注目して授業展開を考えていく例である．

＜小学校での面積指導＞

4年…面積の単位，正方形，長方形の面積

5年…三角形，平行四辺形，円の面積，円周率の意味

6年…およその面積，体積（立方体，直方体）

＜中学校での面積指導＞

1年…扇形の面積・弧長，柱体，錐体および球の表面積，体積

＜高等学校での面積指導＞

2年…微分・積分

3年…微分・積分

以上のように面積・体積は小学校から高等学校まで一貫して取り扱われる内容であるから，指導者としての小学校教員，中学教員，高等学校教員はそれぞれの担当校種以外の教材研究を積極的に行うべきである．

【他分野との関連性に注目した授業展開例】（第7回）

なぜ「複素数」を学習するか？これは多くの高校生がもつ疑問の一つである．円周率に関する「緑表紙」教師用解説書にある「……以上のような考え方で，計算を進め，又，違った仕方で計算をしていった結果，どんな大きさの円でも，円周と直径との比が一定であるということが明らかになり，しかも，この円周が直径の何倍であるかという値，すなわち円周率を詳しく計算すると，3.14159…とどこまでも続く数であることがわかることを教えるがよい．そうして，かような計算は，我が国でも，昔の学者の研究したものであり，外国でも，昔から研究されていたものであることを話し，児童も，数学を学んでいくと，だんだんわかるようになっていくものであることを説き聞かせ，数学の正確なものであり，かつ奥深いものであることを悟らせ，好学の心を盛んにすることに努むべきである．…」

という考え方は「数学科教育法」にぜひ盛り込みたい重要な側面である。

この「数学の奥深さをどのように追求していくか」という視点と他分野との関連性に着目するという視点で、ここでは複素数とくに「オイラーの公式の重要性」とその応用例として電気の回路計算に着目して授業展開を考える。

○オイラーの公式

複素数にはいくつかの表現形式がある。例えば、オイラーの公式

$$x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

を電気の回路計算（交流）に範囲を広げ、 i は電流をあらわすので代わりに j を使うことにすると、

$$x + jy = r(\cos \theta + j \sin \theta) = re^{j\theta} = r\angle\theta \quad (\text{ただし, } j = \sqrt{-1})$$

となる。最後の等式の右辺はフェーザ表示 (phasor) とよばれ、数学では極座標表示であり、電気の回路計算ではよく用いられる表示形式である。

2つ目の「 $=$ 」は三角関数と指数関数を結ぶものとして重要であり、このための役割をはたすのがオイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (1)$$

である。この公式は現在、高等学校では扱うことはないが取り入れることは可能である。

ここではこれを、数式処理ソフト Mathematica を使い説明する。

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

で $x \rightarrow ix$ とすれば

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}ix^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}ix^5 - \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{7!}ix^7 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots\right) + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots\right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

となるが、Mathematica を使って、

```
A = Series[Cos[x], {x, 0, 10}], B = Series[Sin[x], {x, 0, 10}]
```

A + I B を計算し、**Series[Exp[I x], {x, 0, 10}]** を計算することにより、

オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

を確認することができる。ここで、 $x = \pi$ とすれば

$$e^{i\pi} = -1 \quad \dots \quad (2)$$

となる。

○ 交流回路計算への複素数の利用

高校の物理において、時間的に変化する交流回路に関する計算は非常に複雑であった。しかし、この計算について複素数とくにオイラーの公式を利用することによって交流電圧や交流電流の計算が簡単になることが知られている。例えば、交流電圧を

$$v = V_0 \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2}V_{rms} \sin(\omega t + \varphi) \quad (V_0 : \text{最大電圧}, V_{rms} : \text{実効値})$$

をオイラーの公式を用いて

$$v = \sqrt{2}V_{rms} e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (\text{ただし } j = \sqrt{-1}, \text{ 回路計算では虚数単位は } j \text{ とし電流の } i \text{ と区別する})$$

と表せば、この虚数部分が電圧を表している。

また微分に関しては、コイルLに交流電流 $i = I_{rms} \sin \omega t$ を発生させる電源電圧は

$$v = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} (I_{rms} \sin \omega t) = \omega L I_{rms} \cos \omega t$$

と求めることができるが、電流iの複素数表示 $i = I_{rms} e^{j\omega t}$ を用いると、

$$v = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} (I_{rms} e^{j\omega t}) = j\omega L I_{rms} e^{j\omega t}$$

となり、その虚数部分と一致し、さらに電流の微分は単に $j\omega$ をかけるという代数演算に置き換わる。

さらに積分については、キャパシタ（コンデンサ）Cに交流電流 $i = I_{rms} \sin \omega t$ が流れているとき、キャパシタにかかる電圧は複素数表示 $i = I_{rms} e^{j\omega t}$ を用いて、

$$v = \frac{1}{C} \int I_{rms} e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega C} I_{rms} e^{j\omega t}$$

となり、電流の積分は $\frac{1}{j\omega}$ をかけることになる。

また、電圧の複素数表示である $v = \sqrt{2}V_{rms} e^{j(\omega t + \varphi)}$ に対し、 $V_{rms} e^{j(\omega t + \varphi)} = V_{rms} e^{j\omega t} e^{j\varphi}$ であるので、時間的変化を省略し、実効値 V_{rms} と初期位相角 φ を用いた

$$\dot{V} = V_{rms} e^{j\varphi} \quad \text{または} \quad \dot{V} = V_{rms} \angle \varphi$$

をフェーザ表示として表す。また、電流も同様に $\dot{I} = I_{rms} \angle \varphi$ と表す。そこで、LCR回路での電圧

$$v = L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + Ri \quad \cdots (*)$$

をフェーザ表示にすると、

$$\dot{V} = Lj\omega \dot{I} + \frac{1}{C} \left(-\frac{j}{\omega} \dot{I}\right) + R\dot{I} = \left\{ R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right\} \dot{I} = \dot{Z} \dot{I} \quad \cdots (**)$$

となり、フェーザ表示を用いることで、微分方程式(*)が代数方程式(**)に置き換わり、オームの法則のように表すことができる。

内容は高等学校物理の交流の単元で扱う程度であるが、複素数表示を導入することで、非常に簡潔な表示のもと計算が可能になり、高校段階での導入の余地はあると思われる。

【数学実験を取り入れた授業展開例】(第14回)

席替えを話題に、シミュレーションを取り入れた授業展開を紹介する。

【問題】30人のクラスで席替えをします。クラス全員が席替えの前の座席と違うことは、どのくらいの割合で起こるでしょうか？

この席替え問題は、確率のモンモール問題として知られている。この関係式もフィボナッチ数列と同様、三項間漸化式として、再帰的に定義できる。

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1 \quad a_{n+2} = (n+1)(a_{n+1} + a_n) \quad (n=1,2,3,\dots) \cdots (*)$$

求める割合(確率) $P(n)$ は、すべての場合が $n!$ であるので $P(n) = \frac{a_n}{n!}$

となり、*式は、

$$P(n) = \frac{n-1}{n} P(n-1) + \frac{1}{n} P(n-2)$$

と変形できる。

これを、数学的に解いて一般項を求め、結果のみ示すと、

$$P(n) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \cdots \cdots \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

となる。 n を大きくすることで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = e^{-1} = 0.367879 \cdots \quad (e \text{ は自然対数の底})$$

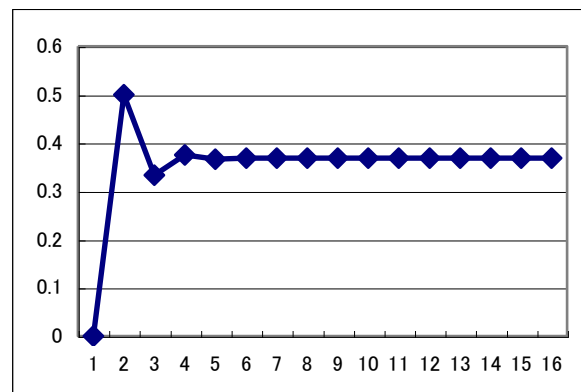
に限りなく近づくことが知られている。これは、指数関数 e^x のテーラー展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \cdots + \frac{x^n}{n!} \cdots \cdots$$

を利用している。このように、この問題は確率の問題として計算するには非常に難しい問題である。

そこで、コンピュータを利用した表計算ソフトウェアで次のような表を作成してシミュレーションしながら、この問題を考えることは有効であることを示す。

回数 n	場合の数 a(n)	総数 n!	確率 P(n)
1	0	1	0
2	1	2	0.5
3	2	6	0.333333333
4	9	24	0.375
5	44	120	0.366666667
6	265	720	0.368055556
7	1854	5040	0.367857143
8	14833	40320	0.367881944
9	133496	362880	0.367879189
10	1334961	3628800	0.367879464
11	14684570	39916800	0.367879439
12	176214841	4.79E+08	0.367879441
13	2290792932	6.23E+09	0.367879441
14	32071101049	8.72E+10	0.367879441
15	4.81067E+11	1.31E+12	0.367879441
16	7.69706E+12	2.09E+13	0.367879441



* 上の表のセルにおいて、場合の数 a(n)や総数 n!の欄には再帰的な式を入力する。

4 今後の課題 ―教職大学院での教員養成の可能性―

21世紀に向けて子ども達に身につけて欲しい力とは、自らの自由や幸福追求できる問題発見・解決能力、批判的思考力とともに、社会的文脈の中での望ましい勤労観、コミュニケーション力、協調力、社会的責任力であろう。このような時代要請をうけて教育の改善を視野に入れた教員養成が不可欠になると考える。そのために、まずは教科の再編成を視野に入れた教科教育法の再検討である。学部 of 教員養成課程では依然として伝統的な教科中心の「教科教育法」が実施されているが、大学院レベルでは単一教科でない学際的な教科間でのカリキュラムや授業法の研究開発が必要である。すなわち上記の例のように物理と数学や、数学と関連するさまざまな教科との教科横断型カリキュラムの開発である。次は授業モデルの改善である。従来の黒板とチョークからの授業からの脱却が不可欠である。ICTの活用はこれら伝統的な授業モデルの革新となるがすべての授業者がすべての授業において展開できる訳ではない。しかし、ICTを用いた授業設計力を身につけることで、ICT環境が不十分な場合でもその本質的な展開が可能である。

以上見てきたように,これからは教科に関する深い知識だけでなく,新しいまなびの創造者として,学際的・情動的な視野もった人材の育成とそのための教員養成のあり方が大きな課題となってくる.

[参考文献]

- [1] 復刻版「尋常小学算術」,新興出版社啓林館,2007.10.
- [2] 新編「新しい算数」,東京書籍,2007.7.
- [3] 佐藤義久「電気回路基礎」,オーム社,2010.
- [4] 安部実:「電気数学 ―ベクトルと複素数―」,共立出版,2006.
- [5] 東京工業大学附属科学技術高等学校さきがけ教育研究会編:「数理応用」,2005.