****

* 報　　告 *

****

教職課程での数学教材開発について

－課題研究の中間報告－

早稲田大学高等学院　武沢　護

台東区立柏葉中学校　永井　信一

渡辺　暁生

0　はじめに

課題研究として「数学科教員養成における大学と現職教員等との連携の在り方」というテーマで研究を進めている．教職課程におけるカリキュラム研究を軸に展開する予定であるが，今回の中間報告では次の視点を持った教材の開発について述べる．

具体的には，

・算数，数学教育が単一教科の枠から脱却し，総合的な学習の時間などの趣旨を活かした数学と他分野の関連・融合教材

・わが国の古典的である和算に注目した教材

の視点に注目するが，今回は特に高等学校の新学習指導要領に関連し，物理分野との融合教材だけでなく，数学Ａにおける「図形の性質」ならびに数学Ⅲに復活した「複素数平面」や数学Ⅰ，数学Ｂにでの「データの分析」や「確率分布と統計的な推測」に関係した教材について取り上げた．

1　数学教材としての「ケプラーの法則」と「万有引力の法則」

「ケプラー(1571～1630)の法則」をもとにして，ニュートン(1642～1727) は「万有引力の法則」を発見したといわれている．ここには数学と物理の結びつきとも関連して，多くの数学（物理）教育上の有意義な教材を含んでいると考えられる．しかし，教科書（数学，物理）では簡単な記述で終わっている場合が多い．注目すべき視点を列挙すると，

①どのようにして(どのように数学を使って)ケプラーの法則から万有引力の法則が導き出されるのか？

②二つの法則における「発見の基本的相違」は何か？

③ケプラーが研究に取り組んだのはどんな時代だったか？　どのような意欲が数十年にわたるケプラーの努力の根源にあったか？

④「万有引力の法則」は，その後どのように発展していったか？

⑤どのような数学が必要となっていったか？

などがあげられる．これらの内容を教職課程で将来数学の教員となる学生が学習し理解することは「数学離れ，理科離れをなくす」教育という観点からも重要なことであろう．ここでは①の視点を中心に具体的な内容を述べる．

1-1　ケプラーの法則

ケプラーの法則は次の 3 つからなる．

第 1 法則　惑星は，太陽をひとつの焦点とする楕円軌道上を動く．

第 2 法則　惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積は，一定である．

第 3 法則　惑星の公転周期の 2 乗は，軌道の長半径の 3 乗に比例する．

はじめに第 1 法則および第 2 法則が発見され，1609 年に発表された．（10 年後）第 3 法則が発見されて 1619 年に発表された．ケプラーは（ティコ・ブラーエ(1546～1630)，および自分自身の）観測データからこの法則を発見した．たとえば第 1 法則は観測の結果「楕円軌道上を動く」という事実の発見であり，数学的な解析によるものではない．また「楕円」という図形については既知であろうが，二次曲線としての概念はデカルト(1596～1650)以降である．

1-2　ニュートンの運動の法則

ニュートンの運動の法則は次の 3 つからなる．

第 1 法則（慣性の法則）：外力が加わらなければ，質点はその運動(静止)状態を維持する．（力を加えられない質点は等速度運動（等速直線運動）を行う

第 2 法則（運動方程式）：質点の運動（運動量）の時間的変化は，それにかかる力の大きさに比例し，力の方向に作用する．

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}.$$

第 3 法則（作用・反作用の法則）：二つの質点間に働く力には一方の質点に作用する力だけでなく，他方への反作用の力がある．これらの力は大きさが等しく，方向が逆である

1-3　万有引力の法則

ニュートンは自分が発見した運動の法則(2) と，ケプラーの法則(1)をもとに万有引力の法則を導き出した．（ケプラーの第 1 法則および第 2 法則が発見から 56 年後の 1665 年）．

『2 つの物体の間には，物体の質量に比例し，2 物体間の距離の 2 乗に反比例する引力が作用する』式で表すと，万有引力の大きさ F は，物体の質量を M,m，物体間の距離を r として，

$F = G\dfrac{m\,M}{r^n}$　となる．ただしGは万有引力定数である．

1-4　「ケプラーの法則」から「万有引力の法則」へ

数学の学習においては，いくつかの場面で「物理と関連させながら学習すること」が重要であり，このことにより数学の必要性が実感され，数学の学習のモチベーションの一つと位置づけることができる．また科学を総合的に理解する上で効果的であろう．さらに，数学と物理を結びつけるだけでなく，（ある面では）便宜的な，数Ⅰ，数Ⅱ・・・，図形，数量・・・といった区分を取り払うことも，時には必要である．また，このような学習が「発展的な自主学習」に結びつくものであってほしい．

このような観点でこの内容を進めるにあたっての，いくつかの〔留意点〕をあげつつ具体案を提示する．

〔留意点１〕物理の内容について

ここでは「ケプラーの法則」「万有引力の法則」）を明確にする（視点②にも簡単にふれる）．

〔留意点２〕「離心率」のように二次曲線一般について

基本的にはこの場合ならば，ここで扱う「楕円」だけについて詳しく扱い，二次曲線一般については（興味を刺激するため）結論だけある程度触れるようにする．ただし，生徒の実状によりベストな道を選択する．

〔留意点３〕極座標表示について

数学の教科書，問題集にあるような難解な入試問題レベルが解けるようにするのが目標ではなく，概念を把握するため等の例題レベルを目標とする．

〔留意点４〕微分積分について

留意点３と同様に扱う

〔留意点５〕観察データから法則へ

惑星の運動の観察データからスタートした研究がここに「太陽からの距離ｒの２乗に反比例する引力の存在に到達した．ニュートンはさらにこれを地上の物体も含む「普遍的な力」にまで推し進めたことに注目する．

〔留意点６〕教科書の記述から

「ある惑星の質量をｍ[kg]とし，これが太陽の周りを一定の速さｖ[m/s]で半径ｒ[m]の円運動をしているとする．このような円運動をするのに必要な向心力Ｆ[N]は，ケプラーの第３法則$T^2 = k\,r^3$を用いて，下記のようにm に比例し，r^2 に反比例する．

$$F = \frac{m\,v^2}{r} = \left(\frac{m}{r}\right)\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \left(\frac{m}{r}\right) \times \frac{4\pi^2 r^2}{k\,r^3} = \frac{4\pi^2 m}{k\,r^2}$$

作用反作用の法則を考え合わせると，F は太陽の質量 M にも比例すると考えられる．ニュートンは一般に二つの物体（質量 m，M．物体間の距離 r）の間には

$$F = G\frac{mM}{r^n}$$

で表される力がはたらくと考えた．（万有引力の法則)」

（東京書籍　高等学校 物理Ⅱより）

惑星の円運動を仮定すれば，上記のように簡単に万有引力が導かれる．しかし歴史的にケプラーが火星の楕円軌道の発見についやした数年にわたる「苦闘」を考えると，「簡単に・・・・」と教科書で扱ってしまうのには抵抗がある．

1-5　「Philosophiae naturalis principia mathematica（自然哲学の数学的原理）1686」

「万有引力の法則」はニュートンの「自然哲学の数学的原理」(プリンキピア)」に述べられている．それは上記のような「解析的」な論法ではなく「幾何学的」である．ニュートンは当然，自分自身で開発した「解析的」方法を理解していたはずだし，英語はもちろん堪能であろう．しかし，多くの人に自分の考えを伝えるのにはこれがベストと考えたのであろう．

例えば，中心事項の一つである「命題 11」は下記のように記述されている（英訳本より）

命題 11「楕円運動からの逆２乗則の導出」

物体（惑星）の軌道が楕円であり，向心力の中心が楕円の焦点である場合，向心力は距離の２乗に反比例する．

プリンキピアを原文で読むのは「多大な労力が必要」といわれている．1-4 のような解説・説明が可能になったのは「17，18 世紀を中心とする微分積分学の発展」と現代における「数学教育の普及」によるものであろう．もしこのような観点での「数学教育の普及」に手を抜くならば，数学文化の逆行につながるであろう．

２　反転の教材化

高等学校学習指導要領解説の数学Ａの内容と内容の取り扱いにおいて，図形の性質は「中学校において学習した基本的な作図や三角形の合同条件，相似条件などの図形の性質を基にして，三角形の性質や円の性質など平面図形に関する基礎的な内容についての理解を深め，それらを事象の考察に活用できるようにするとともに，図形に対する直観力・洞察力を養い，図形の性質を論理的に考察し表現する能力を育成する．また，基本的な図形の性質を作図に活用し，図形に対する見方を豊かにし，数学の学習に対する興味や関心を高める．さらに，空間における直線や平面についての基礎的な内容や

多面体などに関する基本的な性質を理解し，それらを身近な事象の考察に活用できるようにする.」とある．また，課題学習の実施も義務づけられた.

反転は円に関する鏡映変換であるが高校の正規のカリキュラムではあまりなじみがない．一方大学入試では散見されるため，予備校の授業では扱われることも多い．そこで数学Aの中で取り扱えるよう，作図ツールや方べきの定理と関連させて反転の教材化を試みる．また，教職課程の数学カリキュラムの側面から有用性が感じられる応用例についても触れる.

2-1　反転の定義

【定義】　半径 r，中心 O の円がある．平面上の点 P に対して，点 P' を

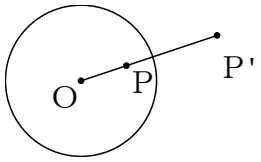
$$OP\cdot OP' = r^2$$

となるように O を端点とする半直線 OP 上にとる.

このとき，点 P から点 P' への対応を反転という.

O を反転の中心，円を反転円，r を反転の半径という.

点 P' を点 P の反転（反点，逆点）と呼ぶ.



【補足】この定義から点 P が反転円の内部にあるときは点 P' は円の外部，点 P が反転円の外部にあれば点 P' は円の内部，点 P が反転円の周上にあれば点 P' は点 P に一致することがわかる.

2-2　反転の作図

＜点 P が反転円の内部にあるとき＞

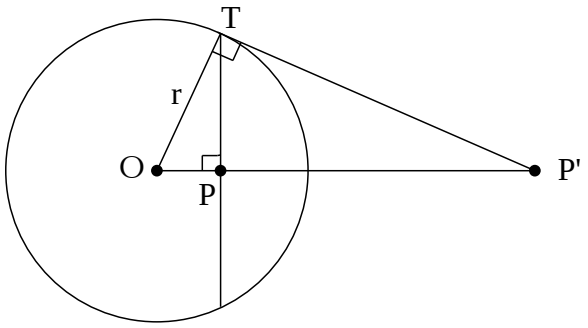
点 P を通り半直線 OP に垂直な弦をかく.

交点の１つを T とし，T における円の接線と OP との交点を P' とすると，

△OPT∽△OTP' だから，

$$\frac{OP}{OT}=\frac{OT}{OP'}$$

より，$OP\cdot OP' = r^2$



【補足】点 P が反転円 O の外部にある場合には，P から円 O への接線をひき，接点を T とする.

点 T から OP に下ろした垂線の足が点 P' となる.

2-3　反転の基本性質

【性質１】　反転の中心を通る直線の反転はそれ自身である.

【性質２】　反転の中心を通らない直線の反転は反転の中心を通る円に反転される.

【性質３】　反転の中心を通る円は反転の中心を通らない直線に反転される.

【性質４】　反転の中心を通らない円は反転の中心を通らない円に反転される.

【性質５】　２つの円が反転の中心で接しているとき，これらは平行な２直線に反転される.

【性質６】　２つの円が反転の中心以外で接しているとき，これらは接する２つの円に反転される．

【性質７】　接していない２つの円は，反転の中心をうまくとれば同心円に反転することができる．

【性質８】　中心 O，半径 r の円に関して，２点 P，Q の反転を P'，Q' とするとき，

$$P'Q'=\frac{r^2}{OP\cdot OQ}\cdot PQ$$

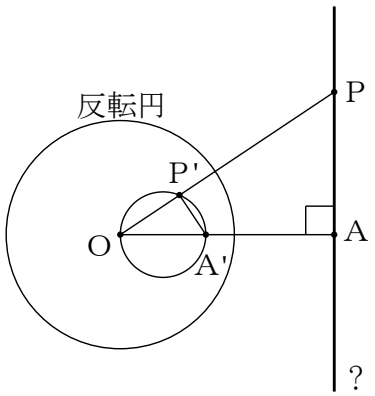
【性質９】　反転によって角の大きさは変わらない．

＜性質２の証明＞

反転の中心 O を通らない直線ℓの反転は点 O を通る円になることを示す．

反転円 O の半径を r，O から直線ℓにひいた垂線の足を A，A の反転を A' とする．

直線ℓ上の任意の点を P とし，半直線 OP が OA'を直径とする円と交わる点を P' とする．



このとき，△OAP∽△OP'A'だから，

$$\frac{OP}{OA}=\frac{OA'}{OP'}$$

したがって，$OP\cdot OP'=OA\cdot OA'=r^2$

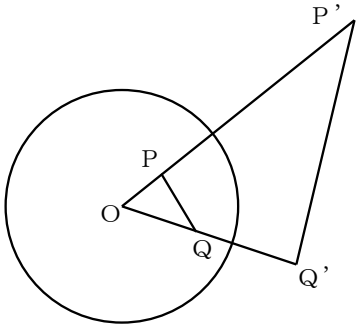
すなわち，点 P が直線ℓ上を動けば，P' は OA' を直径とする円を描く．ただし，点 O は除く．

点 A が反転円 O の内部に入った場合も同様に証明できる．

＜性質８の証明＞

△OPQ∽△OQ'P' だから，

$$\frac{P'Q'}{PQ}=\frac{OP'}{OQ}=\frac{OP\cdot OP'}{OP\cdot OQ}=\frac{r^2}{OP\cdot OQ}$$



したがって，

$$P'Q'=\frac{r^2}{OP\cdot OQ}\cdot PQ$$

2-4　反転の応用

①トレミーの定理

円に内接する四角形において，２組の対辺の積の和は対角線の積に等しい．すなわち，

円に内接する四角形を ABCD とすると

AB･CD+AD･BC=AC･BD

が成立する.

＜反転を利用した証明＞

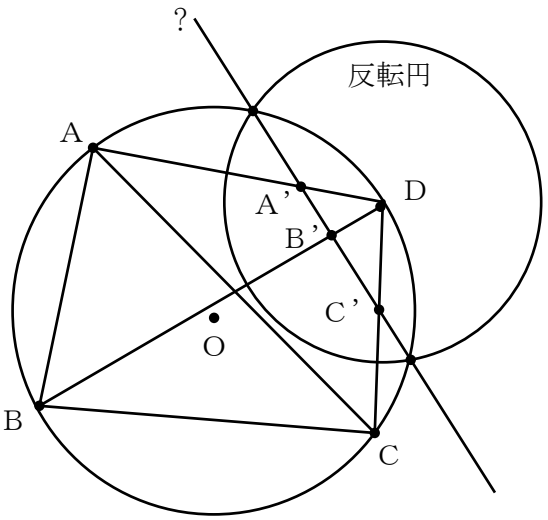
点 D を中心とし半径 r の円で反転すると,

円 O は直線ℓに反転される.

このとき，点 A，B，C の反転をそれぞれ

A'，B'，C' とするとこの３点はℓ上に並ぶ.

反転の性質より,



$A'B'=\frac{r^2}{DA\cdot DB}\cdot AB$　　$B'C'=\frac{r^2}{DB\cdot DC}\cdot BC$　　$A'C'=\frac{r^2}{DA\cdot DC}\cdot AC$

A'B'+B'C'=A'C'　だから，上の３式を代入し整理すれば，AB･CD+AD･BC=AC･BD　となる.

（証明終）

その他，次の例にも応用できる.

②アルベロスの問題

③シュタイナーの円環

④フォイエルバッハの定理

⑤算額(和算)の問題

2-5　中間まとめと今後の課題

反転の基本性質を一部列挙したが，高校生にとって意味のある範囲はどこまでなのか，また授業の中で作図ツールをどのように活用していくのかさらに研究を進めたい．また，今回数学Ⅲで復活した複素数平面との関連で，単位円による反転　$w=\frac{1}{z}$　にも触れたい.

３　データが作る法則（分布の重要性）

3-1　新しい学習指導要領における扱い

中学校において，新しい学習指導要領（中学の全面実施は 2012 年から．移行措置として 2009 年度から）では，領域構成において現行の「数と式」「図形」「数量関係」の３領域から確率・統計に関する領域「資料の活用」を新設するとともに,「数と式」「図形」「関数」「資料の活用」の４領域に再構成した．第１学年ではヒストグラムや代表値を用いて資料の傾向を読み取る．また，第２学年では確率を用いて不確定な事象をとらえ説明することを学習する．さらに第３学年では標本の傾向を調べることで母集団の傾向を読み取ることを，簡単な標本調査を行うことで理解できるようにするとなっている．一方，高等学校においては次のようになった．ただし( )内は単位数である.

◎現行：数学Ⅰ(3)，数学Ⅱ(4)，数学Ⅲ(3)，数学 A(2)，数学 B(2)，数学 C(2)，数学基礎(2)

◎新課程：数学Ⅰ(3)，数学Ⅱ(4)，数学Ⅲ(5)，数学 A(2)，数学 B(2)，数学活用(2)

となった.

特に，確率・統計分野に関する具体的な内容は次の通りである.

・数学Ⅰ（必履修）：データの散らばり，データの相関，課題学習

・数学 A：場合の数と確率（選択），課題学習

・数学 B：確率分布と統計的な推測（選択），課題学習

・数学活用：社会生活における数理的な考察

ここでは，数学 A が「場合の数」,「整数の性質」,「図形の性質」の３つから２つを選択，数学 B は「確率分布と統計的な推測」,「数列」,「ベクトル」の３つから２つを選択となっている．選択パターンによっては，この離散的な数学や統計的な数学は選択されない場合も十分考えられる.

数学Ｂの内容：

確率分布（確率変数，二項分布），正規分布，統計的な推測，母集団と標本，

統計的な推測の考え方（信頼区間）

3-2　諸外国での扱い（特に分布の扱い）

統計を重視しているイギリスやオーストラリアのカリキュラムは次のようになっている.

・イギリス（選択科目：Statistics１，2…日本の高校３年生相当）

確率分布，二項分布，幾何分布，相関係数，回帰分析，正規分布，ポアソン分布，仮説検定

・オーストラリア（mathematics for year12…日本の高校３年生相当）

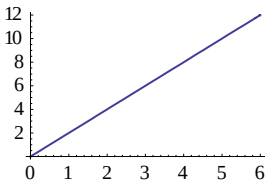
正規分布，仮説検定，信頼区間，二項分布

というように扱い,イギリスでは選択科目とはいえ,かなりのページを割いて教科書も充実している.

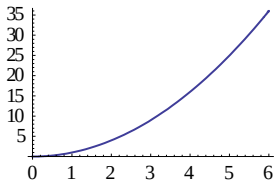
3-3　データが作る法則

統計分布というと一般に正規分布，二項分布，ポアソン分布などが有名であるが，ここでは，教材として「べき乗分布」を見直す．特に「べき二乗の法則」は自然現象と相性がよく，自然界にあまねく宿る法則といっても過言ではない.

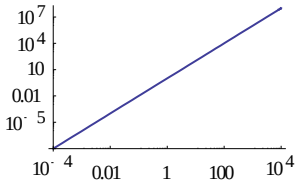
3-3-1　１次関数，２次関数，両対数グラフ



$y = 2x$



$y = x^2$



両対数グラフ

この両対数グラフにおける直線では，x が 10 倍増えると，y は 100 倍増える関係になっている．

3-3-2　べき乗分布

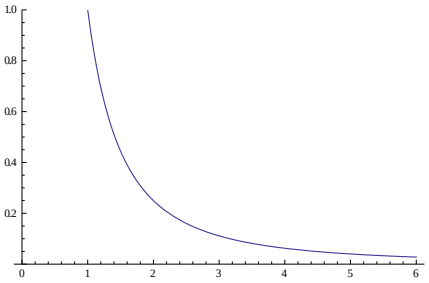
べき関数　$f(x)=ax^k$　に対し，これを分布関数とする分布を「べき乗分布」と呼ぶが，これは，

f(x) と x の対数をとったとき，

$$\log f(x)=\log a+k\log x$$

となり対数-対数プロットでは直線になる．

なお，片対数で直線関係になるのは指数関数である．



べき乗分布

3-4　自然界でみられるべき乗則

ここでは教材としていくつかの事例を紹介し，教職課程での教材開発におけるいくつかの視点を提供する．

例１：地震の頻度とエネルギーの大きさ（グーテンベルグ＝リヒターの法則）

「地震の生じる頻度　$\rho(E)$ は地震のエネルギーＥのべき乗の逆数に比例する」

具体的に，地震のエネルギーが 2 倍になると地震の頻度は 4 分の 1 になる．

頻度　$\rho(E)$ は，

$$\rho(E)=c\,E^{-2}$$（Ｅ：エネルギー）

とかけ，また両対数をとることで，

$$\log\rho(E)=\log c-2\log E$$

と 1 次関数になる．

例２：スケール不変性

べき乗則での特徴的な性質はスケール不変性である．べき関数 $f(x)=a\,x^k$ に対し，

$$f(cx)=a(cx)^k=c^k ax^k=c^k f(x)$$

となることより，定数 a に無関係に定数倍となる．

また，f(x) と x の両対数をとったときに，

$$\log f(x)=\log a+k\log x$$

となり対数-対数プロットでは直線関係になる．

すなわち，べき関数は a に無関係に相似になることである．

例３：フラクタルとの関係

ある図形の部分が全体図形の縮小になっている図形のこと．すなわち，相似変換 f1 , f2 に対して，

$$f1(D)\cup f2(D)=D$$

となる図形 D を自己相似図形という．この図形が，全体を 1/a に縮小した相似形 b 個によって成り立っているならば，

$$b = a^D \quad \text{すなわち} \quad D = \frac{\log b}{\log a}$$

と相似次元（フラクタル次元）Dを定める．

このとき，海岸線の長さなど複雑な地形の長さは計測に使用する目盛の粗さ(スケール)によって変わり，目盛の細かいスケールを使用するほど海岸線の長さはより長く計測される．目盛スケールを G とすると，計測される海岸線の長さはおおよそ $L(G) = M \bullet G^{1-D}$ となる．ここで D はフラクタル次元である．これはべき乗則になっており，両対数をとると直線関係になる．

例４：ケプラーの法則と逆二乗の法則

$$\text{べき乗則} \quad F = G\frac{m_1 m_2}{r^n}$$

ケプラーの第一法則：惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描く

ニュートンによる万有引力の法則（ｎ＝２：逆二乗の法則）がケプラーの第一法則（経験則）を完全に定式化した．

このべき乗分布は，円の半径と面積，物理の電磁力，生物学，コンピューターネットワーク，地球科学など自然科学だけでなく，株価の変動，収入分布，単語の頻度（Zip の法則）社会科学などの分野においても非常に重要な分布になっているにもかかわらず，いままで高等学校数学では扱うことはほとんどなかった．指数関数・対数関数の重要性とともにもう少し取り上げられてもいいのではないか。この内容はさまざまな興味深い教材開発の可能性がある．

４　今後に向けて

今回は上記の例のようにいままで教材としてあまり取り上げられてこなかったタイプの例を示した。このような教材開発をすることで教科横断型カリキュラムの開発を視野にいれ，今後，教職大学院における教員養成のカリキュラムを研究していく予定である．

［参考文献］

[1] 検定教科書「高等学校 物理Ⅱ」，東京書籍．

[2] 難波　誠「平面図形の幾何学」，現代数学社，2008.

[3] 武沢，永井，渡辺「中等教育ならびに大学教職課程のカリキュラムに関する実践研究」，早稲田大学教育学会誌，第 29 巻，pp.12-25.2011.