

ベクトルのカリキュラム

—数理科学の視点を持ったカリキュラム研究—

早稲田大学高等学院 武 沢 護

渡辺 暁生

1 : はじめに

現行の学習指導要領では、ベクトルは数学 B（平面上のベクトル，空間座標とベクトル）で扱われている。しかし，次期指導要領（2018 告示）ではベクトルが数学 C に設置されることになった。形式的には数学 B と数学 C の履修順序はないので数学 C を 2 学年に設置することも可能であるが，あまり現実的ではない。この改訂は高等学校数学において大きな変化でもあり改悪である。今後の大学初年級の数学のカリキュラム（線型代数）にも大きな影響を与えることは必至である。

2 : 明治以降の数学（ベクトルの視点から）

これを歴史的に見ていく^{[1][2]}。まずは明治 7 年頃，東京開成学校（東京大学の前身）では教科書として Kelland・Tait “Introduction to Quaternions”, 1873. が使用されていたといわれる。これは四元数の入門書とされ，第 2 章：ベクトルの和差，実数倍。第 3 章：ベクトルの積に関連して四元数を導入している。さらに，明治 19 年に菊地大麓（1855-1917）が「数理積義」を出版した^[3]。これは William Kingdon Clifford (1845-1879) の原案とする “Common Sense of the Exact Sciences” を翻訳したもので，もともと東京近県の教員対象用に作られたもののようだった。これは次の五編からなる。

第一編：数，第二編：スペース，第三編：量（クオンチティー），第四編：位置，第五編：運動。

この中では，第四編にベクトル，複素数（数理積義では“複数”：コンプレックスナンバー），四元数，行列式（数理積義ではデデルミナント）が扱われ，Hamilton の四元数だけでなく，Hermann Gunther Grassmann (1809-1877) の Ausdehnungslehre（広延論）の一端も扱っているようである。

さて，数理積義の第四編の特長として次の 3 つを挙げよう。特にベクトルの積について内積の定義が興味深い。

(1) 複素数の幾何学的導入

ここでは、 i を平面上での反時計回りの直角の回転として導入し、複素数(この数理解義では”複数”)を幾何学的に導入している。

(2) ベクトルの積①

二つのベクトル AP , AQ の積 $AP \cdot AQ$ を、 AP と AQ を二辺とする平行四辺形の符号付面積と定義する。すると、

$$AQ \cdot AP = -AP \cdot AQ, \quad AP \cdot AP = 0$$

が成り立つ。このような関係をもつ量を Grassmann は **alternate unit**(オルテルネートユニット)という名を与えたという。

例： A , B を二つのオルテルネートユニット， a, b をスケーラーとすると、 $aA + bB$ で表される量を「オルテルネートナンバー」といい、

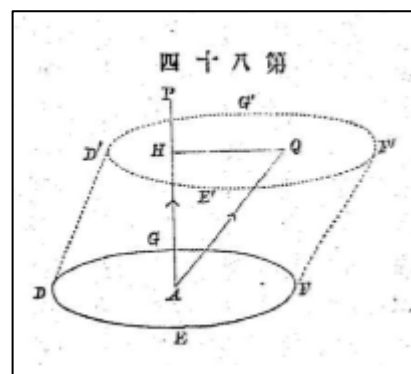
$$(aA + bB)(a'A + b'B) = (ab' - a'b)A \cdot B$$

と定義し、これをデデルミナントと呼び、尋常の代数とは異なる特有の代数を構成した。

(3) ベクトルの積②

ここは興味深いので原文を掲載しよう。

「歩 AP ハ面積 $DEFG$ ヲ表ハスモノトス此面積ハ AP ニ直角ナリ歩 AQ ハ常ニ自己ニ平行ニ動き其端 A ハ面積 $DEFG$ 中ノ各点ニ至ルトセバ AQ ノ経過シタル場所ハ一個ノ斜体ニシテ平行面 $DEFG, D'E'F'G'$ ノ間ニ在リ此斜体ノ体積ヲ積 $AP \cdot AQ$ ノ表ハス所ナリトスルモ亦一個の見解ナリ斜体ノ体積ハ底面ト高サ AH ノ積ナリヲソレゾレ r, ρ , ヲベクトル AP, AQ ノ大サス θ ヲ角 PAQ ノ大サトス然レバ $AH = \rho \cos \theta$ ニシテ体積 $AP \cdot AQ = r \rho \cos \theta$ ナリ体積ハ大サノミニシテ方向無キモノナレバ此見解ニ由レバベクトルノ積ハスケーラー量ナリ故ニ新契約ハ前節ノ契約トハ全ク異ナレル結果ヲ生ス」^[3]



また、第二次世界大戦前では旧制中学校や旧制高等学校の「普通教育」においては、「純粋数学」に重きがおかれ、ベクトルは力学や電磁気学のための数学と考えられていたためあまり系統立てて扱われなかった。ベクトルの扱いについては Hermann Wyle “Raum, Zeit, Materie” (1918) においてアフィン幾何学を体系的に扱い、数学的公理的に取り扱っている。また、Wyle の考えに影響を受けた Schreier-Sperner の“Einführung in die analytisch Geometrie und Algebra”(1931)によりベクトルを用いた解析幾何学が広まったといわれる。

このころから、大学の数学科でもベクトルは基本的な概念の一つになりつつあり、藤原松三郎「代数学 第一巻」(1928)では複素数の幾何学的表示としてのベクトル、高木貞治「代数学講義」(1930)

でも複素数に関連してベクトルが扱われ「複素数ノ加法ハ力学デイフ“ヴェクトル”ノ加法ト同様ニナル」という表現が使われている。

3：新制高等学校での学習指導要領の変遷

戦後は大幅な改訂があり、ベクトルが本格的に扱われたのは昭和 35 年(1960 年)改訂からである。このとき「数学ⅡB」および「応用数学」で扱われるようになり、現在に至っている。ただ、現在の高等学校数学においてベクトルは代数的側面がつよく、平面幾何が中心であり、次元に依存しない特性をもつにもかかわらず空間幾何の扱いが軽くなり、物理への応用に関する記述は現在では皆無である。次に年代毎の科目配当を列挙する。

1951 年(昭和 26 年)改訂：(実際の実施年度は 3～4 年後である)、()は単位数。

一般数学 (5), 解析Ⅰ (5) → 解析Ⅱ (5), 幾何 (5)。

1955 年(昭和 30 年)改訂：

数学Ⅰ (6・9), 数学Ⅱ (3), 数学Ⅲ (3・5), 応用数学 (3・5)。

1960 年(昭和 35 年)改訂：

数学Ⅰ (5), 数学ⅡA (4), 数学ⅡB (5) (ベクトル), 数学Ⅲ (5), 応用数学 (6)。

・数ⅡB：平面ベクトル(空間ベクトルは参考扱い)。応用数学では、外積まで取り扱っていた。

1970 年(昭和 45 年)改訂：

数学Ⅰ(6) (ベクトル), 数学ⅡA (4), 数学ⅡB (5) (ベクトル), 数学Ⅲ (5), 数学一般 (6), 応用数学 (6)。

・数学Ⅰ：平面ベクトル(内積なし), 数学ⅡB：空間ベクトル, 内積, 3次元での直線・平面の方程式, ベクトル方程式。応用数学：外積は取り扱いなし。

1978 年(昭和 53 年)改訂：

数学Ⅰ (4), 数学Ⅱ (3) (ベクトル), 代数・幾何 (3) (ベクトル), 基礎解析 (3), 微分・積分 (3), 確率・統計 (3)

・代数・幾何：平面ベクトル, 空間ベクトル(3次元での直線・平面の方程式, ベクトル方程式)は別の章立て。この時期のベクトルのカリキュラムはかなり内容豊富であった。

1989 年(平成元年)改訂：

数学Ⅰ, 数学A, 数学Ⅱ, 数学B (ベクトル), 数学Ⅲ, 数学C。

・数学B：ベクトル章内に平面ベクトル, 空間ベクトル(簡単なベクトル方程式を含む。前の指導要領のような直線・平面の方程式はなし)

1999 年(平成 11 年)改訂：

基礎数学 (2), 数学Ⅰ (3), 数学A (2), 数学Ⅱ (4), 数学B (2) (ベクトル),

数学Ⅲ (3), 数学 C (2).

・数学 B: 平面ベクトルと空間ベクトル (3 次元での簡単なベクトル方程式を含む) は別の章立て.

2008 年 (平成 20 年) 改訂 (現行):

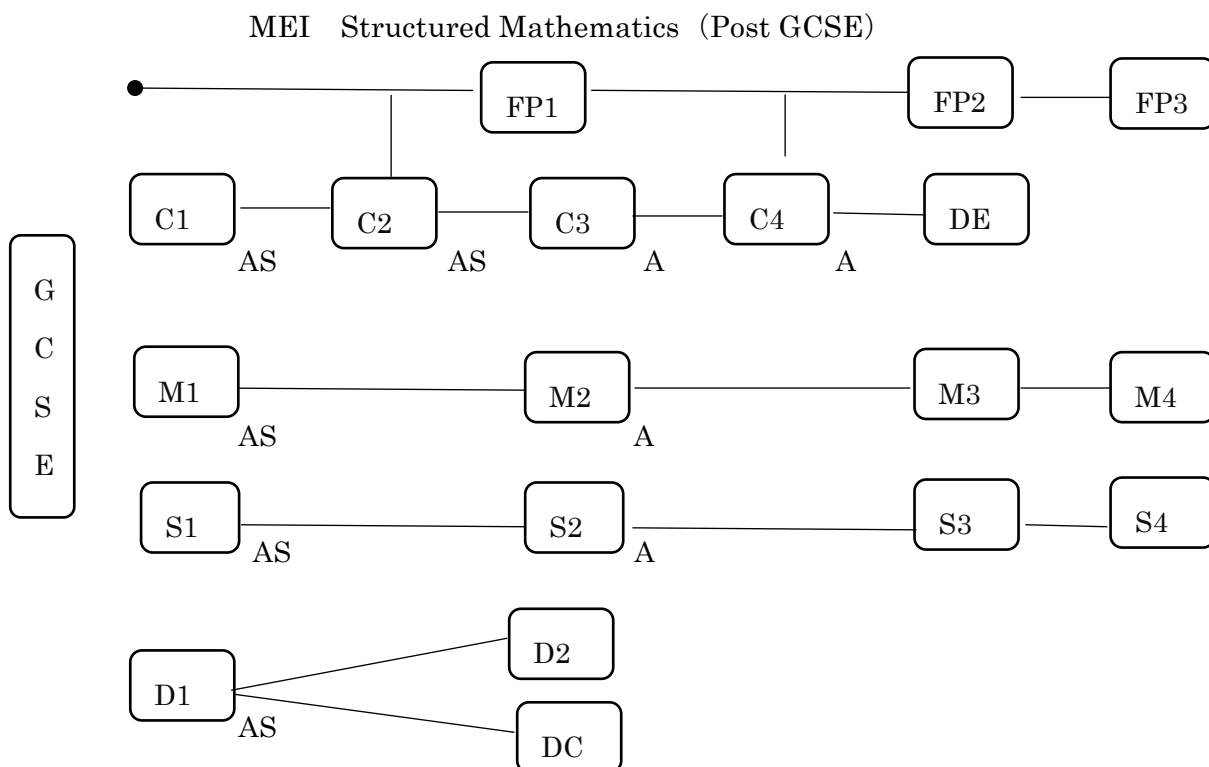
数学 I (3), 数学 A (2), 数学 II (4), 数学 B (2) (ベクトル), 数学Ⅲ (5), 数学活用 (2).

2018 年 (平成 30 年) 改訂 (次期):

数学 I (3), 数学 A(2), 数学 II(4), 数学 B(2), 数学Ⅲ(3), 数学 C(2) (ベクトル).

4 : イギリス (United Kingdom) の高等学校の数学カリキュラム体系

ここではイギリスの数学のカリキュラムをみていく. イギリス (主にイングランド) では, 1979 年のサッチャー政権誕生以降, 1988 年の教育改革によりナショナルカリキュラムが制定され, その到達度を評価するためのナショナルテストが実施されている. そして, セカンダリスクール最終学年 (16 歳, わが国では中学卒業程度) は全員 GCSE(一般中等教育資格試験)を受験する. これには必修科目と選択科目があり, さらに大学進学を希望する者はシックスフォーム (Sixth form) に 2 年在籍し, その後 GCE-AS/A (General Certificate of Education - Advanced Subsidiary Level/Advanced Level) 試験を受ける. また, イギリスにはわが国のような検定教科書制度はなく, ナショナルテストに応じた教科書や問題集をオックスフォード大学出版, ケンブリッジ大学出版, ロングマン出版などの民間の出版社が作成している. 次の図は MEI (Mathematics in Education and Industry) という独立カリキュラム開発機関が作成した GCSE 以降の数学カリキュラムである.



省略記号：

- ・ FP : Further Pure Mathematics. C : Core Mathematics, M : Mechanics,
- ・ S : Statistics, D : Decision Mathematics, DE : Differential Equations.

中等学校の試験制度：

- ・ GCSE : General Certificate of Secondary Education. (16 歳程度)
- ・ GCE : General Certificate of Education.(AS : AS レベル、A : A レベル) (17 歳～18 歳)

ベクトルに関しては、特に Further Pure3 の内容が充実している。次のその単元構成を掲げる。

○Further Pure3 の項目

- 1 : Vectors, 2 : Vector Product, 3 : Planes, 4 : Normal vectors,
- 5 : A geometrical approach to vector product, 6 : Scalar triple products,
- 7 : Calculating volumes, 8 : Cartesian equations of a line,
- 9 : The vector product equation of a line, 10 : The equation of a plane using scalar products,
- 11 : The intersection of a line and a plane, 12 : Shortest distances,
- 13 : The equation of the line of intersection of two planes

となっており、 2 : Vector Product で外積を扱っている。因みに内積は C4 の内容である。

5 : 外積について (高校生のための四元数から幾何積まで)

わが国の高等学校数学から消えた「外積」を積極的に取り入れることを考えたとしても、例えば新たな「数学 C」における発展問題として外積を「どのようにしてその定義がうまれたのか?」, 「どのように使われるのか?」が明確に示されていないと意味がない。しかし、外積の重要性(「役に立つ」)については歴史的にみればマクスウエルの方程式を見れば、一目瞭然であり、中等教育のカリキュラムで見過ごせない問題点である。

マクスウエルの方程式(原型)が示されたのは 1864 年(ヘヴィサイド 14 歳)であり、まだベクトル解析は確立されていない。そこでこの問題の解決の一つとして、ベクトル解析の土台ともいえる「四元数」(日本でも明治時代、電磁気学に四元数が使われていた時期があった)の視点から見ることも(原点に戻って考察するという点で)意味があるのではないかと考えた。

5-1 ハミルトンの四元数と複素数

ハミルトンは複素数 $a+bi$, (複素数平面) の発展として、 $a+bi+cj$ を目指したが、失敗に終わり、最終的には四元数 $a+bi+cj+dk$ を発見した(1843 年)。実際には複素数が、

実部 : a と虚部 : bi

の形式和で表されるように四元数を、

スカラー部 : a とベクトル部 : $bi+cj+dk$

の形式和で表わした．また四元数 q があるときスカラー部は S_q ，ベクトル部は V_q と表す．

従って $q = S_q + V_q$ である．

また，ハミルトンは複素数の幾何学的表現の視点から，論文の中で複素数を (a, b) と表現した．乗法では，

$$(a, b)(\alpha, \beta) = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha)$$

となる．すなわち

$$(a\alpha - b\beta) + (a\beta + b\alpha)i$$

である．複素数の基本定義は $i^2 = -1$ なので実際に必要な乗積表はこれだけで済む．しかし，四元数の基本定義を $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ とすると，この式から次のような乗積表がつけられる．

○乗積表の準備

- (1) $ijk = -1$ の両辺に左側から i をかける． $(i)ijk = (i)(-1)$, $-jk = -i$, $jk = i$.
- (2) $ijk = -1$ の両辺に右側から k をかける． $ijk(k) = (-1)k$, $ij(-1) = -k$, $ij = k$.
- (3) (2)と(1)の左辺同士，右辺同士を掛け合わせると， $(ij)(jk) = ki$, $-ik = ki$.
- (4) (1) の両辺に右側から k をかける． $jkk = ik$, $-j = ik$, $j = ki$.
- (5) (1) の両辺に左側から j をかける． $jjk = ji$, $-k = ji$, $k = -ji$.
- (6) (2) の両辺に右側から j をかけると $-ijj = kj$, $i = -kj$.
- (7) 以上を総合して四元数の乗積表は

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1, \\ ij &= -ji = k, \\ jk &= -kj = i, \\ ki &= -ik = j \end{aligned}$$

となる．

5-2 四元数の乗積法から内積・外積へ

四元数のベクトル部による乗法を試みる（上記の乗積表を使う）．

二つの四元数を $\mathbf{q}_a = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1\mathbf{i} + \mathbf{a}_2\mathbf{j} + \mathbf{a}_3\mathbf{k}$, $\mathbf{q}_b = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1\mathbf{i} + \mathbf{b}_2\mathbf{j} + \mathbf{b}_3\mathbf{k}$ とすれば，二つの四元数のベクトル部の積は， $\mathbf{a}_0 = \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$ の場合と考えられる（三次元に対応させるため）．

$$\begin{aligned} &(\mathbf{a}_1\mathbf{i} + \mathbf{a}_2\mathbf{j} + \mathbf{a}_3\mathbf{k})(\mathbf{b}_1\mathbf{i} + \mathbf{b}_2\mathbf{j} + \mathbf{b}_3\mathbf{k}) \\ &= \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1i^2 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2j^2 + \mathbf{a}_3\mathbf{b}_3k^2 \\ &\quad + \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2ij + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1ji \\ &\quad + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_3jk + \mathbf{a}_3\mathbf{b}_2kj \\ &\quad + \mathbf{a}_3\mathbf{b}_1ki + \mathbf{a}_1\mathbf{b}_3ik \\ &= -\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_3\mathbf{b}_3 \\ &\quad + (\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1)\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (a_2b_3 - a_3b_2) i \\
& + (a_3b_1 - a_1b_3) j \\
& = -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_2b_3 - a_3b_2) i + (a_3b_1 - a_1b_3) j + (a_1b_2 - a_2b_1) k \cdots (*)
\end{aligned}$$

となり、これをスカラー部とベクトル部に別けると、

$$\text{スカラー部} = -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = -(\text{現在の「内積の定義」})$$

$$\text{ベクトル部} = (a_2b_3 - a_3b_2) i + (a_3b_1 - a_1b_3) j + (a_1b_2 - a_2b_1) k = (\text{現在の「外積の定義」})$$

のように、ベクトルの内積と外積の定義式がここで誕生する。

当然、現代流には内積、外積、の定義等（教科書など）は次のようになる。

二つのベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ がある、このとき、

$$\text{内積 (スカラー積)}: \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\text{外積 (ベクトル積)}: \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2) i + (a_3b_1 - a_1b_3) j + (a_1b_2 - a_2b_1) k$$

* i, j, k はそれぞれ基本ベクトル(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)で k は i, j を含む平面に垂直であり、

$i \rightarrow j$ の方向にネジを回転させたとき進む方向を正の方向とする。

幾何学的には $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$$

である。

マクスウェルは物理量の扱いについて、デカルトの座標幾何的手法とハミルトンの四元数を用いた手法を比較する中で「電気磁気論 (A Treatise on Electricity and Magnetism)」において次のように述べている^[4]。

「・・・デカルトによる座標の導入は数学の発展に関わる重要なステップの一つであった。なぜなら、幾何学的方法を代数的方法に還元できるようになったからである。・・・しかし、物理的な考察をするとき、デカルト座標の導入をあえて避け、空間内の点は座標としてではなくひとつのものとしてとらえたり、力についても3成分ではなくその大きさと向きを考えた方がよい。このように幾何学的、物理的な量を考えることは、より素朴で自然であるが、ハミルトンが空間を取り扱うために四元数の演算を考え出して初めて、大きな段階を経てこのようなアイディアが発展した。

確かに、デカルトの方法は今でも理系の学生にとってもっとも身近なものであり、実際、計算のためには最も有用であるので、すべての結果はデカルト座標で表現できるだろう。しかし、四元数の演算と方法を区別してこのアイディアを導入することはわれわれの対象を研究する上で、特に電磁気学を取り扱う上で非常に有用であると私は確信している。そして、私たちは多数の物理量やその関係を他の通常の式よりもはるかに簡潔にハミルトンの表現によって表すことができる。ハミルトンの方法で最も重要なことの一つはある量をスカラー量とベクトル量を分離することである。・・・」

(空間における物理量と方向の関係について)より

5-3 幾何積へ

四元数での積は、内積とベクトル積を同時に計算できるが、ベクトル解析ではこの内積とベクトル積を分離し体系化して今日に至っている。これは、ベクトル解析用に「現在の使いやすい形に整理」したイギリスの物理学者オリヴァー・ヘビサイド(1850-1925)によるものであると言われている。

この四元数を一般化した幾何積を紹介する^{[5][6]}。この中心的な役割を果たしたのは米国の物理学はヘステネス (D. Hestenes) である。ここでは、3次元空間で考える。

定義：向き付けられた線分 (Oriented length) を v (有向線分) とする。

定義：向き付けられた面分 (Oriented area) を B (有向面分) とする。

定義：向き付けられた立体 (Oriented solid) を T (有向立体) とする。

それぞれは、 R^3 内の 1, 2, 3 次元のベクトル空間をなすが、ここでは、内積を備えた R^3 に対して幾何代数 (Geometric Algebra) G^3 の構成 (8 次元ベクトル空間をなす) を考える。一般には R^n に対して G^n (2^n 次元) を構成できる。

定義：空間 G^3 は次の形からなるものから構成される。

$$M = s + v + B + T.$$

すなわち、 G^3 の元は s : スカラー (0-ベクトル), v : ベクトル (1-ベクトル), B : 2-ベクトル, T : 3-ベクトルの形式的な和からなる空間である。すると、 G^3 ベクトル空間をなすことは明らかとなる。

そして、この幾何代数の鍵として次のような積 (幾何積) を定義する。

定義：幾何積

u, v を 1-ベクトルとするときに、

$$uv = u \cdot v + u \wedge v$$

と定義する。すると、この定義はハミルトンの四元数における積 ($*$) に酷似している。

5-4 幾何積から一般化された複素数へ

さらに、一般化された複素数を次のように考えることができる。幾何学的には複素数を回転に対応させたものである。ここではまず単位擬スカラーを次のように定義する。

定義：単位擬スカラー (The unit pseudoscalar)

e^1, e^2 を R^2 の正規直交基底とすると、 G^2 の基底は、

$$1, e^1, e^2, e^1e^2 = e^1 \wedge e^2$$

となるが、このとき、2-ベクトル

$$i = e^1e^2 = e^1 \wedge e^2$$

を有向平面の単位擬スカラー (The unit pseudoscalar) と呼ぶ。

同様に、 R^3 においても 3-ベクトル

$$I = e^1e^2e^3$$

を考えることができる.

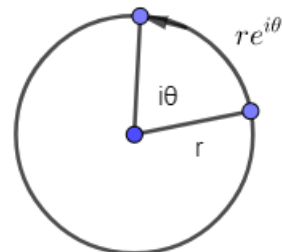
ここで, “平面 i ” と書いたときは, 単位擬スカラーが i であるような平面を意味する. また, 平面 i 内での角 θ を “2-ベクトル $i\theta$ ” の「角」と呼ぶことにする.

こうすることで, その角を存在平面と大きさを一度に表現することができる. さらに,

定義: $e^{i\theta}$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

とする. 複素数 $r e^{i\theta}$ の幾何学的表現は, 半径 r の円周上における向き付けられた弧 (有向弧) すなわち「反時計回りの回転」ということになる.



さらに一般化された複素数を次のように定義する.

定義: 一般化された複素数 (Generalized Complex Number in G^n):

u, v をベクトルとする. $i\theta$ を u から v の角とする. ここで, $r = |u| |v|$, $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$ とする. このとき,

$$uv = r e^{i\theta} = a + bi$$

を一般化された複素数 (Generalized Complex Number) という.

これは,

$$uv = u \cdot v + u \wedge v = |u| |v| \cos \theta + |u| |v| i \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

が成り立つからである.

例: G^2 では, 通常の複素数を表す.

$$a + bi$$

例: G^3 では, 四元数もしくはスピノールと呼ばれる. すなわち, G^3 の基底は

$$\{1, e^1, e^2, e^3, e^1 e^2, e^1 e^3, e^2 e^3, e^1 e^2 e^3\}$$

であり, 特に 2-ベクトルの基底は

$$\{i_1 = e^3 e^2, i_2 = e^1 e^3, i_3 = e^2 e^1\}$$

なので,

$$a + bi = a + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3$$

という四元数を形づくっている.

6: 今後に向けて

応用面で特に重要なことは R^3 での回転である. 引き続き, 幾何積についてはさらに追究していく予定である. なお, 戦後の教科書については, 神奈川県立総合教育センターの教育図書室にお世話になった.

【参考文献】

- [1] 公田蔵：四元法（Quaternion）の明治前期の日本－日本の「高等数学」の教育史の一断面－，
数理解析研究所講究録 1257 巻，2002，pp.244－259.
- [2] 公田蔵著：日本の数学教育とベクトル この百二十五年，数理解析研究所講究録，1317 巻，2003，
pp.190-204.
- [3] 数理積義：国立国会図書館デジタルコレクション <http://dl.ndl.go.jp/info:ndljp/pid/826536>,1886.
- [4] Maxwell, James Clerk : "Treatize on Electricity and Magnetism",Vol1,1095,p.9.
- [5] A.Macdonald : Linear and Geometric Algebra,2010.
- [6] 小島順：線型代数を幾何代数に拡張する．数理科学・数理教育研究会，2015.