

学校数学におけるベクトルに関する一考察

—物理学者ヘステネスによる幾何積の導入—

早稲田大学教職大学院・高等学院 武沢 護 takezawa@waseda.jp

渡辺 暁生 akionabe@hh.ij4u.or.jp

概 要：

高等学校新学習指導要領ではベクトルが数学 C に設置された。このような基礎的な概念は本来であれば数学 I から取り扱うべきと考えるが、数学 C に置かれるのであれば、従来の内容をより豊かにするために、物理学との関連も意図しながら教授内容を改善すべきと考える。本稿では、学校数学においてベクトルの幾何学的内容を充実させるために内積と外積とを融合した幾何積の導入について考察する。

検索語：新学習指導要領、ベクトル、内積、外積、幾何積

1 はじめに

現行の学習指導要領では、ベクトルは数学 B で扱われている。しかし、次期学習指導要領 (2018 告示) ではベクトルが数学 C に設置されることになった。このことは、この年代の生徒が高校時代にベクトルを履修する割合が確実に減ると思われる。形式的には数学 B と数学 C の履修順序はないので数学 C を 2 学年に設置することも可能であるが、あまり現実的ではない。この改訂は高等学校数学において大きな変化である。そして、今後の大学初年級の数学のカリキュラム (線型代数) にも大きな影響を与えることは必至である。

本稿では、学習指導要領の改訂を機会に、わが国における明治以来のベクトルの学校数学での扱いを「積」に着目して考察する。

2 明治以降の数学 (ベクトルの視点から)

明治以降の学校数学では、明治 19 年に菊地大麓 (1855-1917) の「数理積義」が重要である。これはクリフォード (William Kingdon Clifford) の原案とする “Common Sense of the Exact Sciences” を翻訳したもので、この第四編にベクトルがある。特に興味深いことはベクトルの積の導入が外積から内積の順序であることと、内積の定義が立体の体積としているところである。

・ベクトルの積①

二つのベクトル $\mathbf{AP}$, $\mathbf{AQ}$ の積 $\mathbf{AP} \cdot \mathbf{AQ}$ を、 $\mathbf{AP}$ と $\mathbf{AQ}$ を二辺とする平行四辺形の符号付面積と定義する。

・ベクトルの積②

底面 S 上の点 A に対し垂直なベクトル $\mathbf{AP}$ を考える。 S の面積を $|\mathbf{AP}|$ とし、 $\mathbf{AP}$ となす角 θ をもつベクトル $\mathbf{AQ}$ を考え、点 A が S の各点を通り、 $\mathbf{AQ}$ が常に自己に平行に動いてできる立体 (斜円柱) の体積を $\mathbf{AP} \cdot \mathbf{AQ}$ と定義する。

また、第二次世界大戦前では旧制中学校や旧制高等学校の「普通教育」においては「純粋数学」に重きがおかれたため、力学や電磁気学のための数学と考えられていたベクトルはあまり系統立てて扱われなかった。

3 新制高等学校での学習指導要領の変遷

戦後、ベクトルが本格的に扱われたのは昭和 35 年 (1960 年) 改訂からである。このとき「数学 II B」および「応用数学」で扱われるようになり、現在に至っている。ただ、現在の高等学校数学においてベクトルでは外積は扱わず、代数的側面が強く、次元に依存しない特性をもつにもかかわらず平面幾何の扱いが中心であり、物理への応用に関する記述は皆無である。

○1960 年 (昭和 35 年) 改訂：

数学 II B (5) (ベクトル)、応用数学 (6)。

数 II B：平面ベクトル (空間ベクトルは参考扱い)。応用数学では、外積まで取り扱っていた。

○1978 年 (昭和 53 年) 改訂：

代数・幾何 (3) (ベクトル)。

代数・幾何：平面ベクトル、空間ベクトル (3 次元での直線・平面の方程式、ベクトル方程式) は

別の章立て。この時期のベクトルのカリキュラムはかなり内容豊富であった。

4 外積について

わが国の高等学校数学から消えた「外積」を「歴史的」な視点や「自然な定義」の視点から再考することは意義のあることだと考える。

4-1 複素数とハミルトンの四元数

ハミルトン(William Rowan Hamilton)は複素数 $a_0 + a_1 i$ の発展として、四元数 $a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ を発見した(1843年), $a_i \in R$ 。実際には複素数が、

実部 a_0 : 虚部 $a_1 i$
の形式和で表されるように四元数を、
スカラー部 a_0 : ベクトル部 $a_1 i + a_2 j + a_3 k$
の形式和で表わした。

4-2 四元数の乗積法から内積・外積へ

四元数のベクトル部による乗法は、二つの四元数を $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ をそれぞれ基本ベクトルとして、

$\mathbf{q}_a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \quad \mathbf{q}_b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$
とすれば、二つの四元数のベクトル部の積は、 $a_0 = b_0 = 0$ の場合と考えられるので、

$$\begin{aligned} & (a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_1 i + b_2 j + b_3 k) \\ &= -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ &+ (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + \\ &+ (a_1 b_2 - a_2 b_1) k \cdots (*) \end{aligned}$$

となり、これをスカラー部とベクトル部に別けると、ベクトルの内積と外積の定義式がここに現れる。歴史的にはマクスウェル(James Clerk Maxwell)が好んで使用したにも関わらずギブス(Josiah Willard Gibbs)やヘビサイド(Oliver Heaviside)らにより内積・外積を分離したベクトル解析が主流となって現代に至っている。

5 ベクトルの自然な積としての幾何積

この四元数を一般化した幾何積として引き継いだのはクリフォードである。彼が取り組んだクリフォード代数は複雑すぎて一般には広まることはなかったが、これを現代的に復活させたのは米国の物理学はヘステネス(David Hestenes)である。彼はベクトルの「幾何学的側面」に注目して体系を整える。ここでは、3次元空間で考える。

定義：Oriented length を v (有向線分) とする。

定義：Oriented area を B (有向面分) とする。

定義：Oriented solid を T (有向立体) とする。

それぞれは、 R^3 内の1, 2, 3次元のベクトル空間をなすが、ここでは、内積を備えた R^3 に対して幾何代数(Geometric Algebra) G^3 の構成(8次元ベクトル空間)を考える。一般に R^n に対して G^n (2^n 次元)を構成できる。

定義：空間 G^3 は次の形から構成される。

$$M = s + v + B + T.$$

すなわち、 G^3 の元は s : スカラー (0-ベクトル), v : ベクトル (1-ベクトル), B : 2-ベクトル, T : 3-ベクトルの形式的な和からなる空間である。すると、 G^3 ベクトル空間をなすことは明らかとなる。そして、この体系で次のような積(幾何積)を定義する。

定義：幾何積

u, v を1-ベクトルとするとときに、

$$uv := u \cdot v + u \wedge v.$$

この定義はハミルトンの四元数における積(*)に酷似している。

6 幾何積から一般化された複素数へ

さらに、「一般化された複素数」を次のように考える。幾何学的には複素数を回転に対応させたものである。ここではまず単位擬スカラーを次のように定義する。まず、 R^2 で考える。

定義：単位擬スカラー (The unit pseudoscalar) e^1, e^2 を R^2 の正規直交基底とすると G^2 の基底は、

$$1, e^1, e^2, e^1 e^2 = e^1 \wedge e^2$$

となるが、このとき、2-ベクトル

$$i := e^1 e^2 = e^1 \wedge e^2$$

を有向平面の単位擬スカラーとよぶ。

ここで、単位擬スカラー i (2-ベクトル) は平面も意味するし、“ $i\theta$ ”と表現した場合は平面 i 内での θ の大きさをもつ「角」ともとらえることができる。“ $i\theta$ ”とすることで、存在平面と大きさとを一度に表現することができるのである。そこで、

定義： $e^{i\theta}$ (e は自然対数の底)

$$e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta = \cos \theta + e^1 \wedge e^2 \sin \theta (**)$$

とすると、複素数 $e^{i\theta}$ の幾何学的表現は、半径1の円周上における向き付けられた弧(有向弧)すなわち「反時計回りの回転」とになる。そこで「一般化された複素数」を次のように定義する。

定義：一般化された複素数

u, v をベクトルとし、 $i\theta$ を u から v の角とする。ここで、 $r = |u| |v|$, $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$ とする。このとき、

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = r e^{i\theta} = a + bi$$

を「一般化された複素数 (Generalized Complex Number)」という。これは、

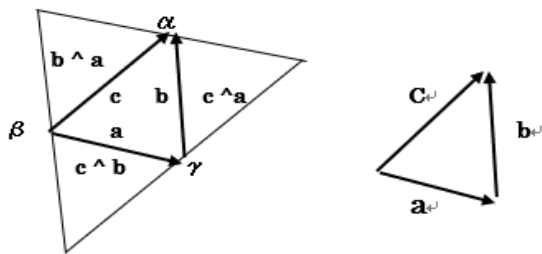
$$\begin{aligned}\mathbf{u}\mathbf{v} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \\ &= |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta + |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| i \sin \theta \\ &= r (\cos \theta + i \sin \theta)\end{aligned}$$

が成り立つからである。すなわち、幾何積はオイラーの公式そのものとして扱うことができるという点でベクトルにとって自然な積を定義している。

7 幾何積の高校数学への応用例

次にいくつかの例を元に、高等学校数学との関連について述べる。

7-1 正弦定理・余弦定理



$$\text{従来} \quad \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

$$\text{幾何積} \quad |\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}| = |\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}| = |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2.$$

7-2 加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

は (**) 式が実現する。

7-3 直線のベクトル方程式は

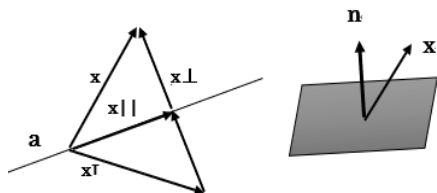
$$(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \wedge \mathbf{u} = 0$$

と表現できる。

7-4 射影, 反射影, 鏡映, 回転

ベクトル $\mathbf{x}$ の方向ベクトル $\mathbf{a}$ の直線に対する射影, 反射影, 鏡映は順に, 次のように記述できる。

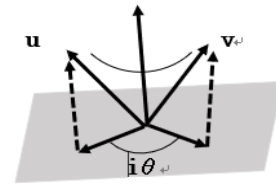
$$\mathbf{x} \parallel = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a}^{-1}, \mathbf{x} \perp = (\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}) \mathbf{a}^{-1}, \mathbf{x} \uparrow = \mathbf{a} \mathbf{x} \mathbf{a}^{-1}.$$



ベクトル $\mathbf{x}$ の法線ベクトル $\mathbf{n}$ の平面に対する射影, 反射影, 鏡映は次のように記述できる。

$$\mathbf{x} \parallel = (\mathbf{x} \wedge \mathbf{n}) \mathbf{n}^{-1}, \mathbf{x} \perp = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}^{-1}, \mathbf{x} \uparrow = -\mathbf{n} \mathbf{x} \mathbf{n}^{-1}.$$

回転は鏡映の繰返しで次のように記述できる。



$$\mathbf{v} = R_{i\theta}(\mathbf{u}) = e^{-i\theta/2} \mathbf{u} e^{i\theta/2}$$

8 物理への応用 (等加速度運動: 斜方投射)

$\mathbf{r}$ を位置, $\mathbf{v}$ を速度, $\mathbf{v}_0$ を初速度, $\mathbf{g}$ を重力加速度とすると, ベクトルの式として,

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g} t \quad \text{より}$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{v}_0 = \frac{2\mathbf{r}}{t}, \quad \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{g} t.$$

上式を幾何積で計算すると,

$$(\mathbf{v} + \mathbf{v}_0)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = 2\mathbf{r}\mathbf{g} \quad \text{より}$$

$$(\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_0^2) + 2\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}_0 = 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{g}).$$

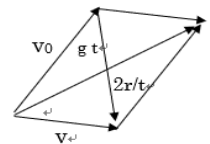
スカラー部と 2-ベクトル部を比較し, さらに $\mathbf{r}$ を水平 (地上) にとると,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{g} = 0 \rightarrow \mathbf{v}^2 = \mathbf{v}_0^2,$$

$$|\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}_0| = |\mathbf{r} \wedge \mathbf{g}| = r g.$$

$$\text{これは, } \mathbf{v}_0^2 \sin 2\theta = r g \rightarrow r = \frac{\mathbf{v}_0^2}{g} \sin 2\theta \quad \text{と水平}$$

距離を求める公式を得ることができる (θ は投げ上げ角: 2θ は $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_0$ のなす角)。



9 おわりに

ベクトルの「自然な積」としての幾何積を考察してきたが, 学校数学への具体的な適用については今後の課題である。また, 幾何代数をサポートするコンピュータソフトウェアも開発されておりその活用に関しても引き続き課題とする。

【引用文献・参考文献】

- ・ 数理解義: 国立国会図書館デジタルコレクション
<http://dl.ndl.go.jp/info:ndljp/pid/826536.1886>.
- ・ A. Macdonald: Linear and Geometric Algebra, 2010.
- ・ 公田蔵: 「日本の数学教育とベクトル この百二十五年」, 数理解析研究所講究録, 1317 巻, 2003, pp.190-204.
- ・ 小島順: 「線型代数を幾何代数に拡張する」, 数理解析・数理解育研究会, 2015