

高等学校数学で相乗平均はどう使うのか
ー正規分布から対数正規分布へー

I : 平均 (いろいろな平均)

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

相加 (算術) 平均

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

相乗 (幾何) 平均

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

調和平均

例 : A 組の数学の点数 = { 63, 40, 30, 61, 79, 100, 73, 40, 0, 41, 73 }

A 組の平均点は? 54.5? (相加平均) では相乗平均は?

例 : ある都市の人口が 2005 年に 20 万人だったのが 2025 年には 40 万人に増加した。このとき、中間の 2015 年の都市の人口はどの程度であるか。ただし、人口の増加は一定とする。

$$20 : m = m : 40 \quad \text{より} \quad \sqrt{20 \times 40} = 28.28$$

例 : 東京から名古屋まで旅行した。行きは平均時速 180km のひかり, 帰りは平均時速 120km のこだまを利用した。往復の平均時速はいくらか。

例 : ある商品の価格の変化が次の表のようになったとする。

年	2022 年	2023 年	2024 年
価 格	1000 円	1100 円	1650 円
前年比 (%)	—	10%	50%
前年比 (小数)	—	1.1	1.5

この商品の 2 年間の前年比の平均を求める。

解 1 : 相加平均では,

$$\frac{1.1 + 1.5}{2} = 1.3 \quad \text{より 平均 30% 増ということになる。}$$

平均の変化

年	2022 年	2023 年	2024 年
価 格	1000 円	1100 円	1650 円
前年比 (%)	—	30%	30%
前年比 (小数)	—	1.3	1.3
平均価格	—	1300 円	1690 円×

当然, これは不適切!

解 2 : 相乗平均では,

$$\sqrt{1.1 \times 1.5} = \sqrt{1.65} \quad \text{となり 平均 } \sqrt{1.65} \doteq 1.2845 \quad \text{増ということになるので次の表のようになる。}$$

平均の変化

年	2022 年	2023 年	2024 年
価 格	1000 円	1100 円	1650 円
前年比 (%)	—	28.5%	28.5%
前年比 (小数)	—	$\sqrt{1.65}$	$\sqrt{1.65}$
平均価格	—	$\sqrt{1.65} \times 1000$ 円	1650 円

○相乗平均：対数を取ることで正規分布になるような分布での平均

$$\log \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \frac{1}{n} \log x_1 x_2 \cdots x_n = \frac{1}{n} (\log x_1 + \log x_2 + \cdots \log x_n)$$

$$\log(x_i \text{ の相乗平均}) = \log x_i \text{ の相加平均}$$

Ⅱ：「量の変換」としての対数関数

関数の働きは規則性や変化の様子をみるだけでなく、量の変換としての働きがある（人間が認識しやすいように、関数で認識を変換する）。特に対数関数は非常に重要である。それは自然界が指数モデルが多いため、対数に変換することで「線型」にできる。

問：物価が昨年 10%増で今年 50%増なのに、2 年間では 60%増にならない。どうしてだろうか？

これは、人間がもつ基本的な数学的認識である「線型性」にもとづく誤解。

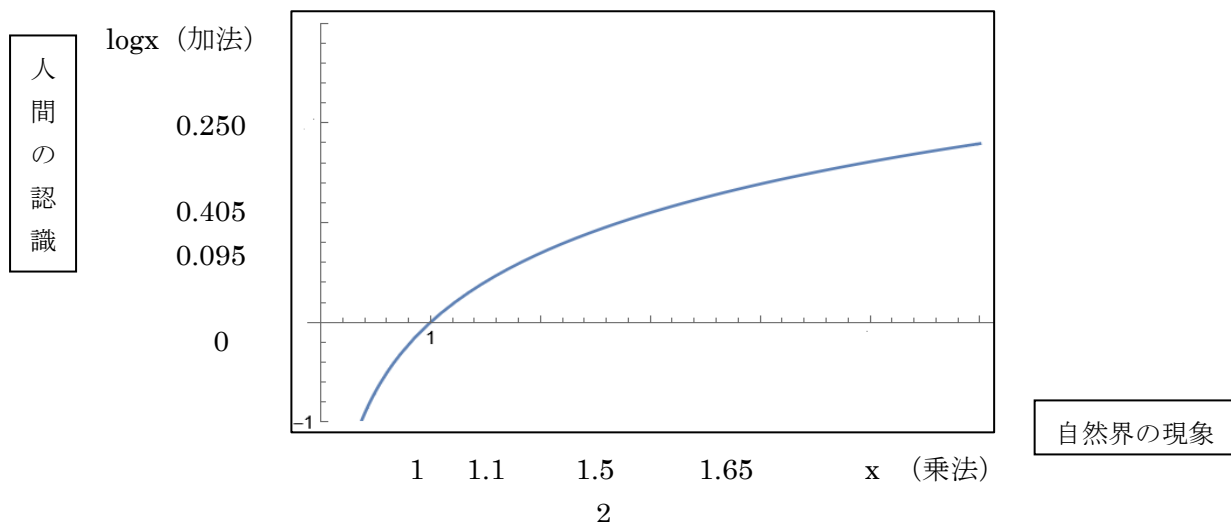
上記の例の場合の解決策として、量を対数関数で変換することで非常に分かりやすいものになる。
すなわち物価に対して、10%増 → 50%増に対して対数をとることで、

$$\log(1.1 * 1.5) = \log(1.1) + \log(1.5) = 0.095 + 0.405 = 0.5 = \log(1.65)$$

となり、9.5%増えてさらに 40.5%増えて計 50%増えたと言い換えることができる。

また、平均増加率は $\frac{0.095 + 0.405}{2} = 0.25$ すなわち $\frac{\log(1.1) + \log(1.5)}{2} = \log(1.65) = 0.25$

対数関数 $\log x$ は「乗法の世界」を「加法の世界」に変換する

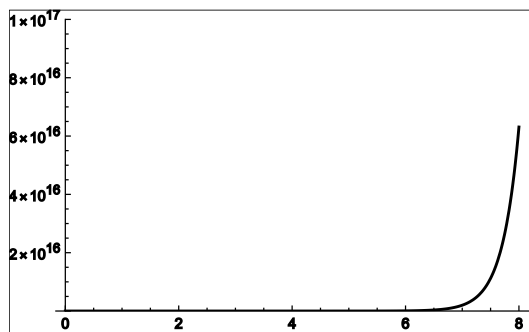


【マグニチュード】 (magnitude)

マグニチュードの定義はさまざまだが、エネルギーによる一般的な定義は、 E : エネルギー (単位: ジュール), M をマグニチュードとすると、

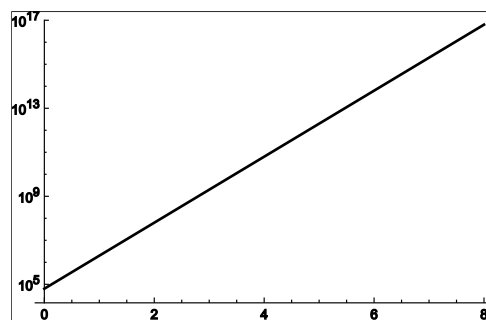
$$E = 10^{4.8+1.5M} \quad \text{つまり} \quad \log_{10} E = 4.8 + 1.5M$$

とする. すなわちマグニチュードが 1 増えるとエネルギーは $10^{1.5} = 31.62$ 倍になるので, 2 増えると約 1000 倍になることになる.



$$E = 10^{4.8+1.5M}$$

非線型



$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5M \quad (\text{片対数グラフ})$$

線型

このように対数関数は、酸アルカリの pH 濃度や地震のマグニチュード、音の大きさデシベルなどの単位に用いられる.

III : 正規分布から対数正規分布へ

正規分布 $N(\mu, \delta^2)$

対数正規分布 $\Lambda(\mu, \delta^2)$ lambda

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta x} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\delta^2}}$$

1. 正規分布と対数正規分布のモデル例

(1) 正規分布のモデル

自然界や社会現象での大量の要素をもつ母集団の測定結果などの分布の基本モデル. 例えば, 実験観測の測定誤差が正規分布に従うと言われる.

大数の法則は, ある母集団から無作為抽出した標本の算術平均は標本の大きさを大きくすると母団の母平均に近づく. これに対して中心極限定理は標本の算術平均と母平均との誤差の確率分布が, 標本の大きさを大きくすると近似的に期待値ゼロの「正規分布」になること.

(2) 対数正規分布のモデル

これに対して, 自然現象を等差的・線型的に捉えるのではなく, 自然界や人間社会に見られる等比的・非線型的に捉える場合は対数正規分布などの裾の長い分布関数が観測されることが多い. 例として資本主義社会での所得分布など.

2 正規分布と対数正規分布の関係

「ある確率変数が対数正規分布に従う」とは「その確率変数の対数をとったものが正規分布に従う」

ことなので, $h(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\delta^2}}$ をもとに $y = \log x$ と変数変換すると,

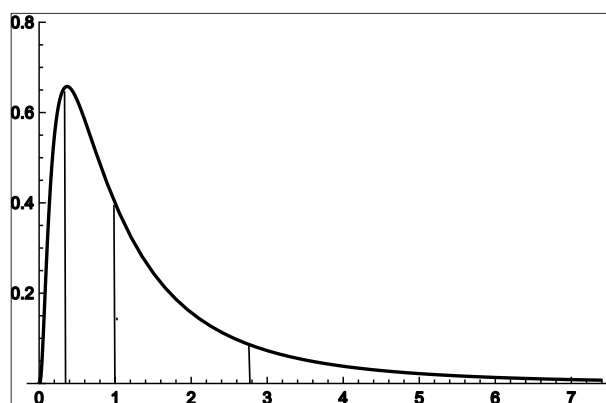
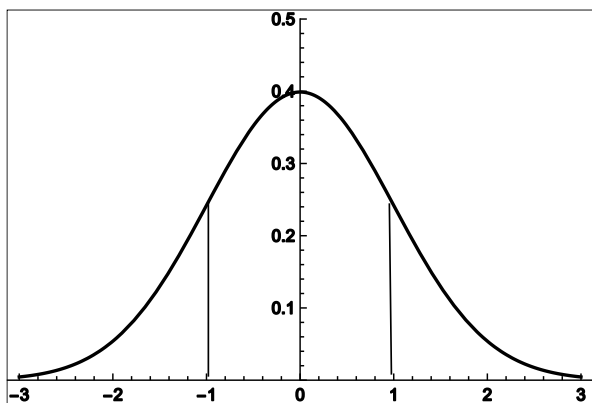
確率密度関数 $g(x)$: $\int h(y) dy = \int h(\log x) \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_X} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\delta^2}} dx = \int g(x) dx$ ■

平均 : $E(x) = \int_0^\infty x g(x) dx = \int_{-\infty}^\infty e^y h(y) dy = \dots = e^{\mu + \frac{\delta^2}{2}}$ ■

分散 : $V(x) = E(x^2) - \{E(x)\}^2 = \dots = e^{2\mu + \delta^2} (e^{\delta^2} - 1)$ ■

$N(0,1)$

$\Lambda(0, 1)$



-1 0 1 log x

e^{-1} 1 e x

相加平均 : $\frac{-1+1}{2} = 0$

相乗平均 : $\sqrt{e^{-1} \cdot e} = 1$

注) 対数正規分布 $\Lambda(\mu, \delta^2)$ のパラメータ (平均, 標準偏差) は対応する正規分布 $N(\mu, \delta^2)$ のパラメータ (平均, 標準偏差) になっていることに注意.

下図は標準対数正規分布 $\Lambda(1, \sigma^2)$ 但し $\sigma^2 : 0.2 \sim 1$ (step 0.1)

`Table[Plot[f[1,n][x], {x, 0.0001, 8}, PlotRange -> {0,1}], {n, 0.2, 1, 0.1}]`

