実験数学のすすめ

―教職科目数学科指導法での取り組み－

Ⅰ　AI 時代の数学教育

　生成 AI（Generative Artificial Intelligence）は現在，社会の各場面での活用やその問題点がいろいろ指摘され，とりわけ教育に与える影響は強く，教育の場面での活用に関するメリット・デメリットが議論されている．数学教育においても例外ではない．生成 AI が数学教育に与える影響については別に述べることにしてこの AI 時代と呼ばれるこれからの時代に向けて，数学教育の在り方すなわち意義や価値を考えていくことがますます求められる．

　一方で「主体的・対話的で深い学び」が推進され，反転学習，アクティブ・ラーニングがもてはやされている．今回の新学習指導要領の目玉は「教育内容」の充実よりは，「教育の方法」の改善におかれている．

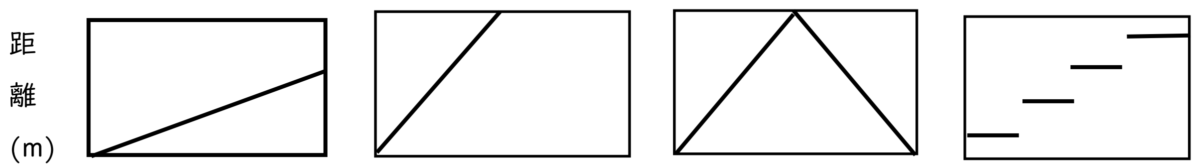
　ここでは，AI 時代だからこそ手作業や実験を伴う授業手法を追究する事例として，教職課程「数学科指導法」における，授業方法の改善の試みとしての「実験数学」活動を紹介する．

Ⅱ　実験数学六題

　授業方法として，疑問から生まれる授業展開，ICT 活用を前提とした授業展開，数学実験を取り入れた授業展開を紹介しよう．

1 関数の実験（体感する関数：距離センサーを用いて）

【活動】:「距離センサー」を用いて次のようなグラフを描画してみよう．



時刻（t）　図1　　時刻（t）　図2　　時刻（t）　図3　　時刻（t）　図4

学生　　センサー

※使用した距離センサーは，
米国 Vernier 社の Go Direct 距離センサー．
因みに図4が難しい．

2　円周率のシミュレーション（Buffon の針）

この実験は，ビュフォン（Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon, 1707- 1788：フランスの博物学者、数学者、植物学者）が考えたものである．

◎Youtube：

https://www.youtube.com/watch?v=B-zlgOlaPbM

【実験】Buffon の針で円周率を計算してみよう！

手順 1：針（2 ㎝）10 本を 5 回投げる．

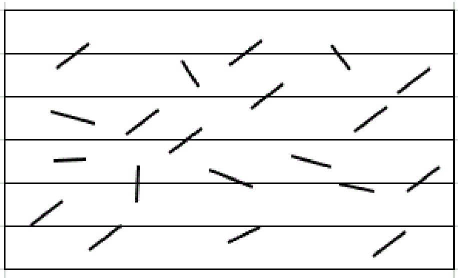
手順 2：Buffon の針での実測円周率を Google Speadsheet に入力する．

Buffon

定理（Buffon）

針の長さ：a，線の間隔：L とすると，針が平行線と交わる確率 P は，次のように求められる．

$$P = \frac{2a}{\pi L}$$

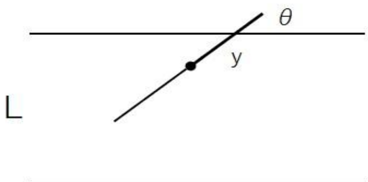


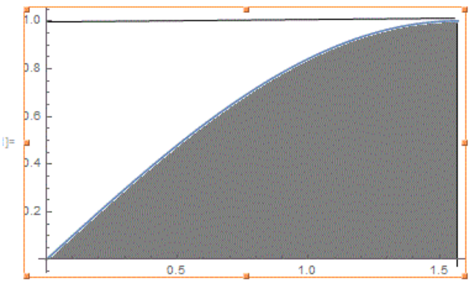
証明：

針の中心 m とし，m と一番近い線分までの距離を y，針と線分とのなす角を θ とする．ここで，

$0 \leqq y \leqq L/2$，$0 \leqq \theta \leqq \pi/2$ としていい．すると，針が線分と交差する条件は，$y \leq \frac{a}{2}\sin\theta$ を満たせばいい．よって　　全体の面積＝$L/2 \times \pi/2$，　斜線部＝$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{2}\sin\theta d\theta = \frac{a}{2}$

$$\text{確率}\quad P = \frac{a}{2} \div \frac{\pi L}{4} = \frac{2a}{\pi L},\quad \therefore\ \pi = \frac{2a}{PL}\quad \blacksquare$$





$y \leq \frac{a}{2}\sin\theta$　　　　確率＝斜線部 / 全体の面積

3　目で見る自然対数の底ｅ

3.1：自然対数の底 e について

数ｅ とは　e = 2.7182818…である無理数，そして円周率πと同様に代数方程式の解ではない超越数である．これは意外にも複利計算に現れる．

例えば，1 万円を年利率 1＝100%での複利で預金するとしよう．

1 年後は，1 万円×（1＋1）＝2 万円

となるが，半年の利率 0.5＝50%として半年複利で計算すると，

1 年後は，1 万円×（1 ＋ 1/2）^{2} ＝2.25 万円

となる．これを毎月にすると，

1 年後は，1 万円×（1 + 1/12）^{12} ＝ 2.61 万円

となるが，これを瞬間毎の複利，つまり連続複利にすると，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

を計算することになり，2.7182818…が現れる．しかし，あまり現実的な事例ではない．

3.2：高等学校の教科書での扱い（伝統的な導入）

（1）極限として定義：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

（2）指数関数の導関数として定義：

$\mathrm{y}=a^x$の導関数において，

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x=y$$

となるような a の値を e とする．すなわち $\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{h}}-1}{\mathrm{h}}=1$.

(3) 定積分の値として定義：

$$\int_1^e\frac{1}{x}dx=1$$

となるような正の数 e と定義.

3.3：目で見る自然対数の底 e

1m のゴムが 2m に伸びるとき，一般に，100%増，逆に 2m が 1m に縮むとき 50%減という．ここでは「相対的な増加率」を考える．

これは，伸びている各時点の長さを分母とし，後続の長さを分子とする割合のことである．

そして，それを限りなく無限小にした伸び率として累積する．

すなわち，無限小伸び率 $\Delta x/x$ の総和が，蓄積されたトータルな伸び率として表現できる．
具体的に，1m から n 等分して各等分点での伸び率を計算して，2m まで加算することで求めてみよう．

$$\frac{1}{1}=1 \qquad \ldots 1\ 分割$$

$$\frac{0.5}{1}+\frac{0.5}{1.5}=0.83333 \qquad \ldots 2\ 分割$$

$$\frac{0.3333}{1}+\frac{0.3333}{1.3333}+\frac{0.3333}{1.6666}=0.782692 \qquad \ldots 3\ 分割$$

$$\frac{0.25}{1}+\frac{0.25}{1.25}+\frac{0.25}{1.5}+\frac{0.25}{1.75}=0.759524 \qquad \ldots 4\ 分割$$

$$\frac{0.1}{1}+\frac{0.1}{1.1}+\frac{0.1}{1.2}+\frac{0.1}{1.3}+\cdots+\frac{0.1}{1.9}=0.718771 \qquad \ldots 10\ 分割$$

一般に，

$$\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{0}{n}}+\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}+\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{n-1}{n}} \quad \ldots n分割$$

となり，n を無限（連続的）にして伸び率を計算すると，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{i}{n}}=\int_1^2\frac{1}{t}dt=\log[2]=0.69314\cdots$$

すなわち，ゴムが 2 倍の長さになるとき 100%増と言わずに，log[2] ＝0.69 伸びたと言うことにする．すると，逆に 2m から 1m に縮むとき 50%縮むとは言わずに，log[1/2] ＝ −0.69 伸びた（ 0.69 縮む）と言うことができる．

では，この累積相対的な増加率が 1 となる長さ（伸びた結果）x は何だろうか．すなわち，

$$\int_1^x\frac{1}{t}dt=\log[x]=1$$

をみたすものである．実はこの x が e = 2.718…である．すなわち，この自然対数の底が累積相対的な伸び率（総和）として 1 になる倍率である．

1m
2m
伸び率　log[2] = 0.693 (69.3%)

1m
2.718m
伸び率　log[e] = 1 (100%)　　これが e

◎Youtube：
https://www.youtube.com/watch?v=EmFeIxWMaSk

4　確率の実験（席替え問題のシミュレーション）

【問題】n 人のクラスで席替えをします．クラス全員が席替えの前の座席と違うことは，どのくらいの割合で起こるでしょうか？

【活動】：上記の問題に対して，n = 5 の場合をシミュレーションする．2 人がペアになり，1 から 5 の数字が記載されている 5 枚のカードをランダムに順に提示し，5 枚とも一致しない（座席が異なる）場合の確率を計算する．シミュレーション作業は 30 回行う．

【補足】（n 人の場合）

n 人の席替え問題は確率の「モンモール問題」（完全順列）として知られ，回数 a_n の関係式が次のように再帰的に定義できる．

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad (n=3, 4, 5, \cdots) \quad \cdot\cdot\cdot (A)$$

さらに，求める割合（確率）$P(n)$ は，すべての場合が n!であるので A 式は，

$$P(n) = \frac{a_n}{n!}, P(2) = \frac{1}{2}, P(1) = 0 \quad \rightarrow \quad P(n) = \frac{n-1}{n} P(n-1) + \frac{1}{n} P(n-2).$$

と変形できる． この三項間漸化式を解くと，

$$P(n) = (1 - \frac{1}{1!}) + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \quad \cdot\cdot\cdot (B)$$

となる．n を大きくすることで，

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = e^{-1} = 0.367879\cdots \qquad (\text{e は自然対数の底})$$

に限りなく近づくことが知られている．

5　統計の実験（正規分布を実感しよう）

【活動】：10 ㎝のテープを 30 枚切る作業をとおして正規分布の謎に迫る．

【手順】A：ハサミでテープを切る人，B：テープを持つ人

① A さんは 10 ㎝を頭に焼き付ける！

② A さんは B さんがもつテープの 10cm と感じる長さをハサミで切り，長さを計る

③ A さんは自分の記録をワークシートに記入する（度数分布表を完成させる）

④ 各自，Google スプレッドシートに自分の記録を入力する

※因みにこの方法は，元神奈川大学の何森仁先生から教わったものである．

6　Mathematica でサウンド作成（円周率のサウンドを作る）

【活動】：Mathematica を用いて円周率をデータリストにしてサウンドにする．

【Mathematica コマンド】

○円周率のサウンド出力

In[1]: = N[Pi, 100]

Out[1]

=3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117068　　　　# 円周率を 100 桁出力

In[2]: = RealDigits[N[Pi, 100]]

Out[2] = {{3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, 7, 9, 3, 2, 3, 8, 4, 6, 2, 6,4, 3, 3, 8, 3, 2, 7, 9, 5, 0, 2, 8, 8, 4, 1, 9, 7, 1, 6, 9, 3, 9, 9, 3, 7, 5, 1, 0, 5, 8, 2, 0, 9, 7, 4, 9, 4, 4, 5, 9, 2, 3, 0, 7, 8, 1, 6, 4, 0, 6, 2, 8,6, 2, 0, 8, 9, 9, 8, 6, 2, 8, 0, 3, 4, 8, 2, 5, 3, 4, 2, 1, 1, 7, 0, 6, 8}, 1}　　　　# リスト化

In[3]: = pi = RealDigits[N[Pi, 10000]] //

In[4]: = ListPlay[pi]　　　　# サウンド出力

○循環小数（1/7）のサウンド出力

In[5]: = bun = RealDigit [N[1/7, 10000]] //Flatten;

In[6]: = ListPlay[bun]

円周率 π のサウンドはほぼ「雑音」，1/7 のサウンドは「通常の音」として聞こえることを確認し，その理由を考えさせる（循環小数か否か）．

Ⅲ　おわりに

　本稿では上記６つの話題を紹介したが，この他の実験作業として「トポロジー手品」「ミウラ折り」などを実施している．受講生たちには，数学が机上で学ぶだけでなく，手作業やコンピュータシミュレーションなどを通して帰納的・実験的にも学べる学問であることを認識してもらえるように授業を行っている．

【参考資料】講義ノートは次の web サイトに掲載しています．
　https://takezawa.w.waseda.jp/lab/lecture/text.pdf

武　沢　護