幾何積ノート
－高等学校数学への応用－

Ⅰ：ベクトルの積について（積の概念を発展させる）

高校数学でのカリキュラムは，ベクトルは先に述べたように，近年では幾何学的な扱いよりも代数学的な扱いが多い．ましてや物理学との関係への言及は皆無である．さらに，積についても内積（ドット積，スカラー積）しか扱うことはない．しかし，3 次元空間での扱いや，何より生徒の疑問（ベクトルでは積はなぜ内積というのか？）に答える意味においても，ベクトルでの多種類の積についても扱うことは自然であり，物理との関連性で外積を扱うことは自然である．

例えば，クーロン力はニュートンの万有引力の法則とほぼ同じ方程式の記述できる．ただし，引力（重力）が直線的な方向を考えるだけでよかったが，電磁気ではそうはいかなかった．ここの数学的スカラー積とベクトル積の威力が発揮される．

例（ローレンツ力）：電荷 q が磁場の中を速度ベクトル $\mathbf{v}=(v_1,\ v_2)$で運動している．ここで電荷の運動方向と垂直方向に磁界（磁束ベクトル $\mathbf{B}=(B_1,\ B_2)$）をかけると，電荷はその両者に垂直な力を受け，働く力ローレンツ力 F は

$$F = q\,(v_1\,B_2 - v_2\,B_1)$$

となるが，これをベクトル積で表現すると，

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$$

と向きまで指定して表示できる点で便利である．

さらに，数学的にベクトルの積のさまざまな積について考察することも意義がある．

ここでは，3 次元間 R^3 内のベクトルを考え，ベクトルの記号は，成分表示

$$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$$

でなく，

$$\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{e}_1 + a_2\,\mathbf{e}_2 + a_3\,\mathbf{e}_3 \quad (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\text{：正規直交基底})$$

とフォント（ボールド体）で区別して表示することにする．

学校数学での内積（ドット積もしくはスカラー積）a・b は

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_1\,\mathbf{e}_1 + a_2\,\mathbf{e}_2 + a_3\,\mathbf{e}_3)\cdot(b_1\,\mathbf{e}_1 + b_2\,\mathbf{e}_2 + b_3\,\mathbf{e}_3) = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3$$

で定義する．また外積（クロス積もしくはベクトル積）$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_1\,\mathbf{e}_1 + a_2\,\mathbf{e}_2 + a_3\,\mathbf{e}_3)\times(b_1\,\mathbf{e}_1 + b_2\,\mathbf{e}_2 + b_3\,\mathbf{e}_3)\\ &= (a_2\,b_3 - a_3\,b_2)\,\mathbf{e}_1 + (a_3\,b_1 - a_1\,b_3)\,\mathbf{e}_2 + (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

と定義し，特に $a_3=0,\ b_3=0$ すなわち，ベクトル $\mathbf{a}$,ベクトル $\mathbf{b}$ が XY 平面上にあるとすれば，
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は Z 軸上のベクトルとなる．

学校数学では，それぞれ内積（inner）・外積（outer）と呼ばれることが多いが，演算に着目すればドット

積(dot)・クロス積(cross)であるし，演算後の結果に着目すればスカラー積(scalar)・ベクトル積(vector)である．物理学ではスカラー積(scalar)・ベクトル積(vector)と呼ぶことが多い．

ここで，形式的な基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ に対して形式和である

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3,\quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$$

に対して積 $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ として，次の積を考えることで統一的に考える．

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} := {} & a_1b_1\,\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1 + a_1b_2\,\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2 + a_1b_3\,\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3 + \\ & a_2b_1\,\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1 + a_2b_2\,\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_2 + a_2b_3\,\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3 + \\ & a_3b_1\,\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1 + a_3b_2\,\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_2 + a_3b_3\,\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

① 基底の条件として，

$$\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_3 = 1,\ \mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3 = 0$$

とすると，

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = a_1b_1\,\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1 + a_2b_2\,\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_2 + a_3b_3\,\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_3 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

とスカラーになり，これは内積(スカラー積)である．この場合の基底の積は同じ方向を考えている．幾何学的は正射影，物理的には同方向への程度を測る量と考えることが出来る．

② 基底条件として，

$$\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_3 = 0,\ \mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$$

とすると，

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3 + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2$$

となり，これは外積(ベクトル積)である．この場合は違う方向の基底の積を考えており，特に，

$$\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$$

とすると $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ がベクトルになる．

さらに一般には $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$(2-ベクトル：bivector)，$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$(3-ベクトル：trivector)と拡張するさせることで拡張された代数系(グラスマン代数，クリフォード代数)が構成できる．

Ⅱ：複素数の拡張としてのハミルトンの四元数

わが国の戦後の高等学校数学から消えた「外積」だが，下記のように歴史的にみればマクスウエルの方程式にも表現された．この方程式(原型)が示されたのは 1864 年であり，まだベクトル解析は確立されていない．マックスウェルは当初，電磁気の数学記述においては四元数を活用した[1]．例として，

$$\nabla = \mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial z}$$ （e_1, e_2, e_3：正規直交基底）

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$ （i, j, k は四元数のベクトル部分の基底）

という形で四元数を用いている．すると，

$$\nabla\cdot\varphi = -S\nabla\varphi$$ （S：四元数のスカラー部分）

となる．ベクトル解析として今日の形に整理したのはイギリスの物理学者オリヴァー・ヘビサイド（1850－1925）と言われているが，ベクトル解析の土台ともいえる「四元数」（日本でも明治時代，電磁気学に四元数が使われていた時期があった）をみていく．

これはアイルランドの数学者ウイリアム・ローアン・ハミルトン（1805－1865）が考え出した数の体系で，ハミルトンの四元数と呼ばれ 4 次元ベクトル空間をなす．

これは複素数が，

$$\text{実部：}\ \mathrm{a}_0,\ \text{虚部：}\mathrm{a}_1\boldsymbol{i} \qquad (\mathrm{a}_0 \in R,\ \mathrm{a}_1 \in \boldsymbol{R})$$

の形式和で表されるように四元数を，

$$\text{スカラー部：}\ \mathrm{a}_0,\ \text{ベクトル部：}\mathrm{a}_1\boldsymbol{i}+\mathrm{a}_2\boldsymbol{j}+\mathrm{a}_3\boldsymbol{k} \qquad (\ \mathrm{a}_\mathrm{i} \in \boldsymbol{R})$$

の形式和で表わした．

四元数のベクトル部による乗法は，二つの四元数を $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ をそれぞれ基本ベクトルとして，

$$\mathbf{q_a} = \mathrm{a}_0+\mathrm{a}_1\boldsymbol{i}+\mathrm{a}_2\boldsymbol{j}+\mathrm{a}_3\boldsymbol{k},\ \ \mathbf{q_b} = \mathrm{b}_0+\mathrm{b}_1\boldsymbol{i}+\mathrm{b}_2\boldsymbol{j}+\mathrm{b}_3\boldsymbol{k}$$

但し，$\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=-1,\ \mathbf{j\,k}=\mathbf{i},\ \mathbf{k\,i}=\mathbf{j},\ \mathbf{i\,j}=\mathbf{k},\ \mathbf{k\,j}=-\mathbf{i},\ \mathbf{i\,k}=-\mathbf{j},\ \mathbf{j\,i}=-\mathbf{k}$

とすれば，二つの四元数のベクトル部の積は，$\mathrm{a}_0=\mathrm{b}_0=0$ の場合と考えられるので，

$$(\mathrm{a}_1\boldsymbol{i}+\mathrm{a}_2\boldsymbol{j}+\mathrm{a}_3\boldsymbol{k})(\mathrm{b}_1\boldsymbol{i}+\mathrm{b}_2\boldsymbol{j}+\mathrm{b}_3\boldsymbol{k})$$

$$= -(\mathrm{a}_1\mathrm{b}_1+\mathrm{a}_2\mathrm{b}_2+\mathrm{a}_3\mathrm{b}_3)+(\mathrm{a}_2\mathrm{b}_3-\mathrm{a}_3\mathrm{b}_2)\boldsymbol{i}+(\mathrm{a}_3\mathrm{b}_1-\mathrm{a}_1\mathrm{b}_3)\boldsymbol{j}+(\mathrm{a}_1\mathrm{b}_2-\mathrm{a}_2\mathrm{b}_1)\boldsymbol{k}\cdots(*)$$

となり，これをスカラー部とベクトル部に別けると，ベクトルの内積と外積の定義式が一つの式として現れる．歴史的にはマクスウェルが四元数を好んで使用したにもかかわらずギブス(Josiah.Willard.Gibbs)やヘビサイドらにより内積・外積を分離したベクトル解析が主流となった．この四元数を一般化した幾何積として引き継いだのはクリフォードであるが，これを現代的に復活させたのは米国の物理学者は D.ヘステネス（David Hestenes）である．彼はベクトルの「幾何学的側面」に注目して体系を整える．

特にベクトル部分同士の積として新たに次のような積 a b を考えた．

$$\mathrm{a\,b} = -\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}+\mathrm{a}\times\mathrm{b}.$$

これは後に述べるクリフォード代数系における「幾何積」とほぼ同じものである．

また，この四元数は 3 次元の回転を記述することに有効であり，物理への応用範囲が広い．具体的には，共役四元数 $\mathrm{q}^* = \mathrm{a}_0 - \mathrm{a}_1\mathrm{i} - \mathrm{a}_2\mathrm{j} - \mathrm{a}_3\mathrm{k}$ とすると，

ベクトル a の回転は，ノルム 1 の四元数 q に対して

$$\mathrm{q\,a\,q}^*$$

となる．ここで q は，回転軸の方向ベクトル $\mathrm{u}=(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3)$，回転角を 2θ とすると，

$$\mathrm{q} = \cos\theta+(\mathrm{a}_1\mathrm{i}+\mathrm{a}_2\mathrm{j}+\mathrm{a}_3\mathrm{k})\sin\theta$$

である．

例：点 A：(1, 0, 0)を直線 l：y = x, z = 0 の回りに 180°回転させた点 B の座標を求めよ．

解：点 A を i として，回転に対応する q は $\mathrm{q}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$なので，対応する四元数 $\mathrm{q}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i}+\mathrm{j})$.

よって

$$B = qAq^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)\, i\, \frac{1}{\sqrt{2}}(-i-j)$$

を計算して, B の座標は(0, 1, 0)と求まる.

この四元数での積は, 内積とベクトル積を同時に計算できるが, ベクトル解析ではこの内積とベクトル積を分離し体系化して今日に至っている. この四元数を一般化したものは, クリフォード代数に発展し, 幾何積の導入となる.

Ⅲ：幾何積

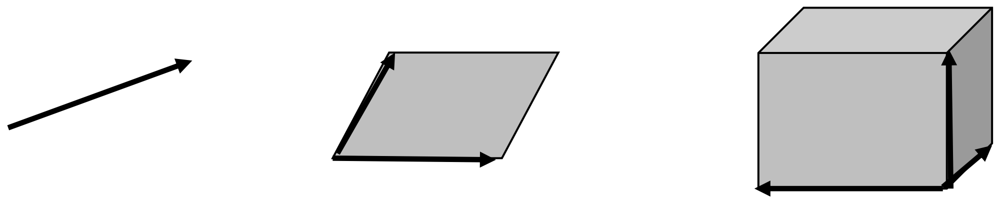
四元数での積は, 内積とベクトル積を同時に計算できるが, ベクトル解析ではこの内積とベクトル積を分離し体系化して今日に至っている. これは, ベクトル解析用に「現在の使いやすい形に整理」したイギリスの物理学者オリヴァー・ヘビサイド(1850-1925)によるものであると言われている.

この四元数を一般化した幾何積を紹介する. この中心的な役割を果たしたのはヘステネスである. ここでは, 3 次元空間で考える.

定義：向き付けられた線分（Oriented length）を v（有向線分）とする.

定義：向き付けられた面分（Oriented area）を B（有向面分）とする.

定義：向き付けられた立体（Oriented solid）を T（有向立体）とする.



u V：1-ベクトル　**u∧v** B：2-ベクトル　**u∧v∧w** T：3-ベクトル

それぞれは, R^3内の 1, 2, 3 次元のベクトル空間をなすが, ここでは, 内積を備えた R^3に対して幾何代数（Geometric Algebra）G^3の構成（8 次元ベクトル空間をなす）を考える. 一般には R^n に対して G^n（2^n次元）を構成できる.

定義：空間 G^3は次の形からなるものから構成される.

$$M = s + v + B + T.$$

すなわち, G^3 の元は s：スカラー（0-ベクトル）, v：ベクトル（1-ベクトル）, B：2-ベクトル, T：3-ベクトルの形式的な和からなる空間である. すると, G^3 はベクトル空間をなすことは明らかとなる.

そして, この幾何代数の鍵として次のような積（幾何積）を定義する.

定義：幾何積

u, v を 1-ベクトルとするときに,

$$u\,v := u \cdot v + u \wedge v \qquad \text{（スカラー＋2-ベクトル）}$$

と定義する．ただし, $u\cdot v = |u||v|\cos\theta$,　$u\wedge v = |u||v|\ e_1\wedge e_2 \sin\theta$. すると, この定義はハミルトンの四元数における積（＊）に酷似している．

3.1　幾何積から一般化された複素数へ

　さらに, 一般化された複素数（Generalized Complex Number）を次のように考えることができる. 幾何学的には複素数を回転に対応させたものである. ここではまず単位擬スカラーを次のように定義する.

定義：単位擬スカラー（The unit pseudoscalar）

　e_1, e_2 を R^2 の正規直交基底とすると, G^2 の基底は,

$$1,\ e_1,\ e_2,\ e_1 e_2 = e_1\wedge e_2$$

となるが, このとき, 2-ベクトル

$$\mathbf{i} := e_1 e_2 = e_1\wedge e_2$$

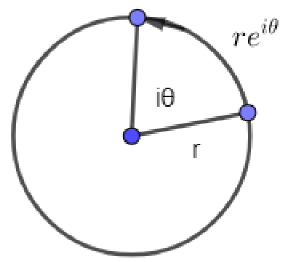
を有向平面の単位擬スカラー（The unit pseudoscalar）と呼ぶ.

同様に, R^3 においても 3 - ベクトル

$$I := e_1 e_2 e_3 = e_1\wedge e_2\wedge e_3$$

を定義することができる.

　ここで, 単位擬スカラー$\mathbf{i}$（2-ベクトル）は平面も意味するし, “$\mathbf{i}\,\theta$”と表現した場合は平面 $\mathbf{i}$ 内での θ の大きさをもつ「角」ともとらえることができる. “$\mathbf{i}\,\theta$”とすることで, 存在平面と大きさとを一度に表現することができるのである. さらに,



定義：$e^{i\theta}$

$$\mathbf{e}^{\,\mathbf{i}\theta} := \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta$$

とする. 複素数 $r\,e^{i\theta}$ の幾何学的表現は, 半径 r の円周上における向き付けられた弧（有向弧）すなわち「反時計回りの回転」ということになる. さらに G^n に一般化された複素数を次のように定義する.

定義：一般化された複素数（Generalized Complex Number in G^n）：

　u, v をベクトルとする. $\mathbf{i}\,\theta$ を u から v の角とする. ここで, $r = |u||v|$, $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$ とする. このとき,

$$u\,v = r\,e^{i\theta} = a + b\,\mathbf{i} \qquad (a\in R,\ b\in R) \qquad\qquad （＊＊）$$

を「一般化された複素数（Generalized Complex Number）」という.

　これは,

$$uv = u\cdot v + u\wedge v = |u||v|\cos\theta + |u||v|\mathbf{i}\sin\theta = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$$

が成り立つからである. また, $r\,e^{i\theta}$ を極表示, $a + b\,i$ をデカルト表示という.

例：G^2 では, 通常の複素数を表す.

$$a + b\,\mathbf{i} \qquad (a + b\,e_1\wedge e_2)$$

例：G^3 では，四元数もしくはスピノールと呼ばれる．すなわち，G^3 の基底は

$$\{1,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_1 e_2,\ e_1 e_2,\ e_2 e_3,\ e_1 e_2 e_3\}$$

であり，特に 2-ベクトルの基底は

$$\{\ i_1 = e_3 e_2\ ,\ i_2 = e_1 e_3,\quad i_3 = e_2 e_1\ \}$$

なので，

$$a + bi \ = \ a + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3$$

という四元数を形づくっている．

Ⅳ：幾何積の高校数学への適用1

次に高等学校数学への適用について述べる．

4.1 正弦定理と余弦定理

高等学校数学 I における三角比の基本的な定理に正弦定理，余弦定理がある．これらはそれぞれ，平面上における三角形 ABC の辺と角との関係に関する定理である．

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c},\ c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos\gamma \quad (a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in R)$$

これを幾何積の視点からみると，1‐ベクトルを用いて，

$$|\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}| = |\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}| = |\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}|,\ (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2 .$$

と表現でき，正弦定理は 2‐ベクトルとしての面積の関係（図 1），余弦定理は単純な 1‐ベクトルの和の関係に還元できる（図 2）．

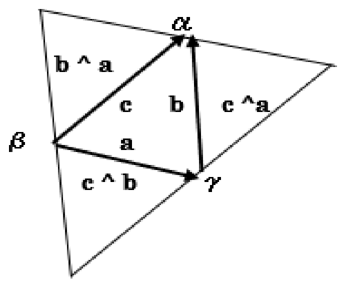


図 1

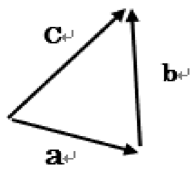


図 2

4.2 加法定理

また，加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

については複素数 $e^{i\theta}$ と関係づけられ(**)式として実現できる．

4.3 直線のベクトル表示

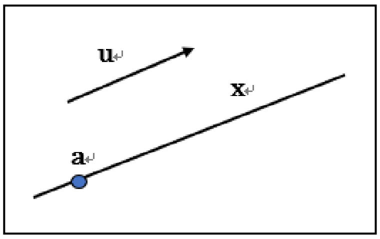


図 3

直線のベクトル表示において, 点 a を通り, 方向ベクトルを u とする直線の方程式は,

$$\mathbf{x}=\mathbf{a}+\mathrm{t}\,\mathbf{u}\qquad \mathrm{t}\in\mathrm{R}$$

と表現できるが, 外積表現では,

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha})\wedge\mathbf{u}=0$$

となる(図 3).

4.4 射影, 反射影, 鏡映

現在の高等学校数学では, 射影, 反射影, 鏡映, 回転は扱うことが少ないが, 2 次元, 3 次元図形において重要なものである.

単位方向ベクトル $\mathbf{a}$ の直線に対するベクトル $\mathbf{x}$ の射影 $\mathbf{x}_{\parallel}$, 反射影 $\mathbf{x}_{\perp}$, 鏡映 $\mathbf{x}_{\top}$ とすると, 順に, 次のように記述できることは知られている(図 4).

$$\mathbf{x}_{\parallel}=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a},\quad \mathbf{x}_{\perp}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\parallel}=\mathbf{x}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a},\quad \mathbf{x}_{\top}=-\mathbf{x}+\mathbf{2}\,\mathbf{x}_{\parallel}=-\mathbf{x}+\mathbf{2}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}\ .$$

これらは幾何積をもちいると, 次のように表現できる.

$$\mathbf{x}_{\parallel}=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})\,\boldsymbol{a}^{-1},\quad \mathbf{x}_{\perp}=(\mathbf{x}\wedge\mathbf{a})\,\boldsymbol{a}^{-1},\quad \mathbf{x}_{\top}=\mathbf{a}\,\mathbf{x}\,\boldsymbol{a}^{-1}.$$

また, 単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の平面に対するベクトル $\mathbf{x}$ の射影, 反射影, 鏡映は通常, 次のように記述できる(図 5).

$$\mathbf{x}_{\parallel}=\mathbf{x}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n},\quad \mathbf{x}_{\perp}=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n},\quad \mathbf{x}_{\top}=\mathbf{x}-\mathbf{2}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\ .$$

これも幾何積を用いると,

$$\mathbf{x}_{\parallel}=(\mathbf{x}\wedge\mathbf{n})\,\boldsymbol{n}^{-1},\quad \mathbf{x}_{\perp}=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\,\boldsymbol{n}^{-1},\quad \mathbf{x}_{\top}=-\mathbf{n}\,\mathbf{x}\,\boldsymbol{n}^{-1}$$

と 2 次元と 3 次元が統一的に扱われる.

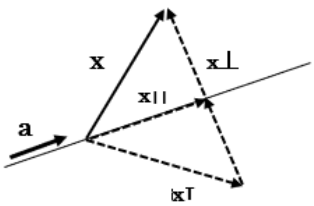


図 4

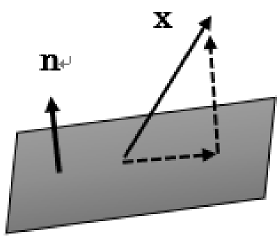


図 5

これらの表現は次の回転の表現に有効である.

4.5　2 次元回転と 3 次元回転

一般に 2 次元の回転には 2×2 の行列 SO(2)を用いることが通常である. しかし 3 次元の回転 SO(3)はかなり複雑になる. しかし, 次に述べるロドリゲスの公式(もしくはロドリーグ：Rodrigues Formula)や幾何積を用いることで 3 次元回転は扱いやすくなり, 高等学校数学にも適用可能になる. ここで, ベクトル **u** を単位法線ベクトル **n** をもつ平面に対して原点 O を中心に θ 回転させてベクトル **v** になる状況を考える(図 6).

幾何積を用いることで, 例えば i 平面での 3 次元回転は鏡映の繰返しで次のように記述できる.

$$v = R_{i\,\theta}(u) = u_{\parallel}\ e^{i\,\theta} + u_{\perp} = e^{-i\,\theta/2} u\, e^{i\,\theta/2} \ \ldots\ldots(***)$$

さらに, 一般化するために **i** 平面のかわりに単位法線ベクトル **n** の回りの回転が,

$$\mathbf{u}_{\parallel}\ e^{\mathbf{n}\,\mathrm{I}\theta}$$

であることを利用する. ただし, I = $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ は 3 次元擬スカラー(The unit pseudoscalar)である.

さらに, 単位法線ベクトル **n** の回りの回転は(***)を用いて,

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{OV} = v_{\parallel} + v_{\perp} = (u_{\parallel})\, e^{n\mathrm{I}\,\theta} + v_{\perp}$$

$$= e^{-n\mathrm{I}\frac{\theta}{2}}(u_{\parallel})e^{n\mathrm{I}\frac{\theta}{2}} + e^{-n\mathrm{I}\frac{\theta}{2}}(u_{\perp})e^{n\mathrm{I}\frac{\theta}{2}} \quad (u_{\perp} = v_{\perp})$$

$$= e^{-n\mathrm{I}\frac{\theta}{2}}(u_{\parallel} + u_{\perp})\, e^{n\mathrm{I}\frac{\theta}{2}} = e^{-n\mathrm{I}\frac{\theta}{2}}(u)\, e^{n\mathrm{I}\frac{\theta}{2}}$$

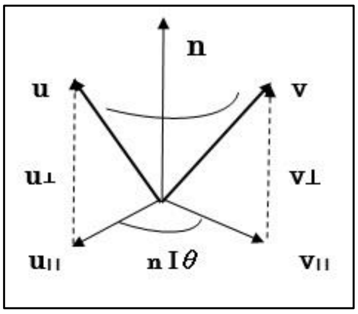


図 6

と非常に単純な形になる.

この両側から挟む作用素を回転子(rotor)と呼ぶ. すなわち鏡映の 2 回の繰返し,

$$\mathrm{Ref}_1(x) = -n\,x\,n$$

$$\mathrm{Rot}(x) = \mathrm{Ref}_2(\mathrm{Ref}_1(x)) = -v(-n\,x\,n)v = v\,n\,x\,n\,v$$

によって回転

$$\mathrm{Rot}\ (x) = R^{-} x\, R$$

$$\mathrm{Rot}\ (x) = e^{-A/2} x\, e^{A/2}$$

$$= e^{-i\,\theta/2} x\, e^{i\,\theta/2}$$

と表現されたことになる.

【2 次元回転の例】 $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ を原点 O を回転軸として $\frac{\pi}{2}$ 回転させる場合：

$$\mathbf{v} = e^{-\mathbf{i}\,\theta/2}\mathbf{u}\, e^{\mathbf{i}\,\theta/2} =$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{4}}(e_1 + e_2)\, e^{i\frac{\pi}{4}} = (\cos\frac{\pi}{4} - e_1 e_2 \sin\frac{\pi}{4})(e_1 + e_2)(\cos\frac{\pi}{4} + e_1 e_2 \sin\frac{\pi}{4}) = \cdots\cdots = e_2 - e_1$$

さらに, 正定値の内積が定義されたノルムは,

$$v^2 = (e_2 - e_1)(e_2 - e_1) = 1 - e_1\, e_2 - e_2\ e_1 + 1 = 2$$

$$u^2 = (e_2 + e_1)(e_2 + e_1) = 1 + e_1\,e_2 + e_2\,e_1 + 1 = 2$$
$$v^2 = u^2$$
と保存され，これは回転では常に成り立つ．

【3 次元回転の例】 e_1を法線方向 $e_1+e_2+e_3$を回転軸として $\frac{2}{3}\pi$ 回転させる場合：

$$n = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1+e_2+e_3),\quad I = e_1\,e_2\,e_3 \text{として，} n\,I = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1+e_2+e_3)e_1e_2e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2)$$

となり，

$$e^{-nI\frac{\pi}{3}}(\,e_1\,)\,e^{nI\frac{\pi}{3}} = (\cos\frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2)\sin\frac{\pi}{3})e_1(\cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2)\sin\frac{\pi}{3})$$

$$= \frac{1}{4}(1-(e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2))e_1(1+(e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2)) = \cdots\cdots = e_2$$

と計算できる．

4.6　回転の表示（行列）

一般に 2 次元の回転には 2×2 の行列 SO(2)を用いることが通常である．

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

しかし 3 次元の回転 SO(3)はかなり複雑になる．3 次元の回転の場合，表現として主に 2 つの方法がある．

・回転軸の方向を指定し，その軸のまわりの回転角によって回転を指定する．

・Euler 角で回転を指定する．

もう一つ，変換一般に言えることだが，変換に対する見方として，

・対象物を変換する（Active View）(図 7)

・対象物を固定して，座標を変換する（Passive View）(図 8)

ものがある．以下では，Active View で考える．

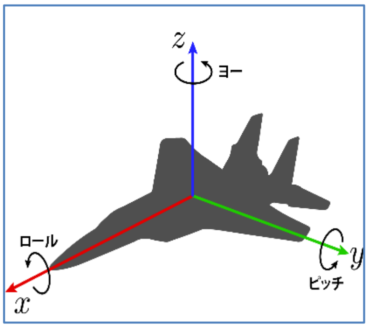


図 7： Roll, Pitch, Yaw

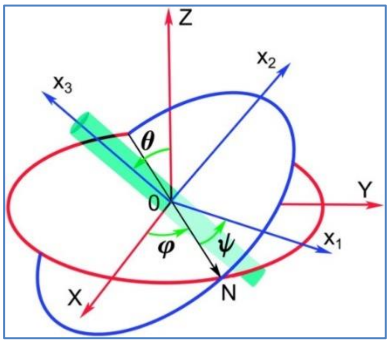


図 8：オイラー角（x 規約）

〇Roll, Pitch, Yaw の表現行列（x, y, z 軸に限定）

$$R_z(y)R_y(p)R_x(r)=\begin{pmatrix}\cos(y) & -\sin(y) & 0\\ \sin(y) & \cos(y) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(p) & 0 & \sin(p)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(p) & 0 & \cos(p)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(r) & -\sin(r)\\ 0 & \sin(r) & \cos(r)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(p)\cos(y) & \cos(y)\sin(p)\sin(r)-\cos(r)\sin(y) & \cos(r)\cos(y)\sin(p)+\sin(r)\sin(y)\\ \cos(p)\sin(y) & \cos(r)\cos(y)+\sin(p)\sin(r)\sin(y) & -\cos(y)\sin(r)+\cos(r)\sin(p)\sin(y)\\ -\sin(p) & \cos(p)\sin(r) & \cos(p)\cos(r)\end{pmatrix}$$

〇オイラー角の表現行列（x 規約：z-x-z 回転）

$$R_z(\phi)R_x(\theta)R_z(\psi)=\begin{pmatrix}\cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0\\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0\\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(\phi)\cos(\psi)-\cos(\theta)\sin(\phi)\sin(\psi) & -\cos(\theta)\cos(\psi)\sin(\phi)-\cos(\phi)\sin(\psi) & \sin(\theta)\sin(\phi)\\ \cos(\psi)\sin(\phi)+\cos(\theta)\cos(\phi)\sin(\psi) & \cos(\theta)\cos(\phi)\cos(\psi)-\sin(\phi)\sin(\psi) & -\cos(\phi)\sin(\theta)\\ \sin(\theta)\sin(\psi) & \cos(\psi)\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

V： 幾何積の高校数学・物理への適用２（回転変換とローレンツ変換を統一的にみる）

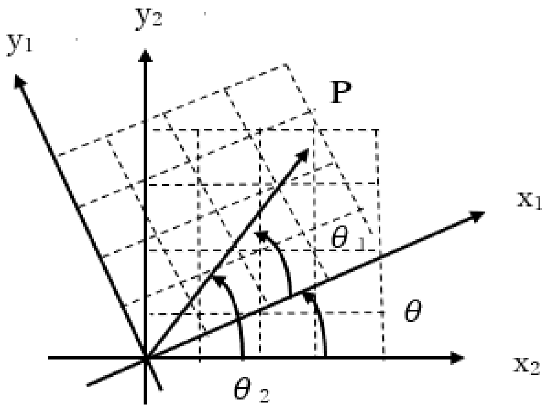
4.5 でみたように回転では標準的な内積からのノルムを保存する. ここでは別の内積によるノルムを考える. ただし, 簡単のために R^2 内で議論する. さらにこの 2 つの線型変換におけるパラメータについても考察する.

5.1 距離不変（回転）

e_1, e_2 を R^2 の正規直交基底とすると, G^2 の基底は,

$$1,\ e_1,\ e_1,\ e_1 e_2 = e_1 \wedge e_2$$

となり, このとき, 2-ベクトル $\mathbf{i} = e_1 e_2 = e_1 \wedge e_2$ で $e_1 e_1 = e_2 e_2 = 1$ をみたすとする. すなわち標準的なノルム（正定値の内積）である.



$$\mathrm{Rot}(x) = R^{-}\ x\ R$$

$$\mathrm{Rot}(x) = e^{-\frac{A}{2}}\ x\ e^{\frac{A}{2}}$$

$$v = e^{-\frac{i\theta}{2}}\ u\ e^{\frac{i\theta}{2}},\ (A = i\,\theta, i = e_1 e_2)$$

だった.

これを高等学校数学と関連させるために成分表示すると,

$$v = e^{-\frac{i\theta}{2}}(u_1 e_1 + u_2 e_2)\ e^{\frac{i\theta}{2}} = (u_1\cos\theta - u_2\sin\theta)e_1 + (u_1\sin\theta + u_2\cos\theta)e_2$$

とよく知られた回転の表現になる.

ここで, パラメータに着目する. 回転に対してはパラメータとして角度 θ と勾配 $S=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\tan\theta$ を考えることができる. 点 P に対して 2 つの座標系(x_1, y_1), (x_2, y_2)を設定し,

パラメータ θ に対して勾配 tanθ を考えると, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+S^2}}, \sin\theta=\frac{S}{\sqrt{1+S^2}}$.

よって, $S_1=\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}=\tan\theta_1$, $S_2=\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}=\tan\theta_2$ とすると,

角度: $\theta_1+\theta=\theta_2$, 勾配: $S_1+S\neq S_2$, $\frac{S_1+S}{1-S_1S}=S_2$, $\tan(\theta_1+\theta)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta}{1-\tan\theta_1\tan\theta}=\tan\theta_2$

が成り立ち, 回転については加法性が成り立つという点で勾配よりも角度のパラメータが優れている.

例: $(x_1,y_1)=(7,6)$, $(x_2,y_2)=(2,9)$, $S=\frac{3}{4}$ の時, $S_1=\frac{6}{7}, S_2=\frac{9}{2}$ では,

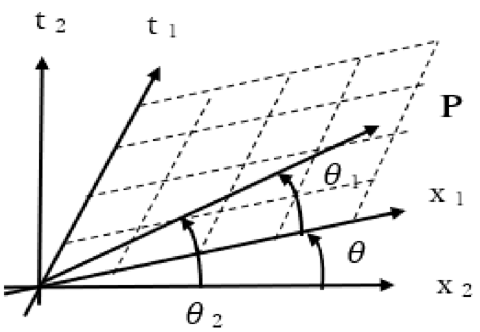
$S_1+S\neq S_2$, $\frac{6}{7}+\frac{3}{4}\neq\frac{9}{2}$ であるが, $\tan(\theta_1+\theta)=\frac{\frac{6}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{9}{2}=\tan\theta_2$

5.2 間隔不変(ローレンツ変換)

e_0, e_3 を R^2 の正規直交基底とすると, G^2 の基底は,

$$1,\ e_0,\ e_3,\ e_3 e_0 = e_3\wedge e_0$$

となるが, このとき, 2-ベクトル $\mathbf{i}=e_3 e_0=e_3\wedge e_1$ に対して $e_0 e_0=1$, $e_3 e_3=-1$ を考えると, これは(1,1)型の内積(ミンコフスキー内積)となる.



$L(x)=R^{-}\,x\,R$

$L(x)=e^{-\frac{A}{2}}\ x\ e^{\frac{A}{2}}$

$v=e^{-\frac{i\theta}{2}}\,u\,e^{\frac{i\theta}{2}}$, $(A=i\theta, i=e_3e_0)$

となる.

これも回転変換と同様に成分で表示すると,

$$v=e^{-\frac{i\theta}{2}}(t\,e_0+x\,e_3)\,e^{\frac{i\theta}{2}}=(t\cosh\theta-x\sinh\theta)e_0+(-t\sinh\theta+x\cosh\theta)e_3$$

と表現でき, この場合は双曲回転になる. パラメータ θ に対して別のパラメータ $\beta=\frac{v}{c}=\tanh\theta$ (ただし,

c は光速)を考えると, この内積はミンコフスキー内積とも呼ばれ特殊相対性理論に用いられる. この β は速度パラメータを表しており便利なものである. $\beta=\frac{v}{c}=\tanh\theta, \theta=\tanh^{-1}\beta=\tanh^{-1}(\frac{v}{c})$ に対して,

$\beta_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}=\tanh\theta_1$, $\beta_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}=\tanh\theta_2$ とすると,

$$\text{角度}: \theta_1+\theta=\theta_2, \ \text{速度}: \tanh(\theta_1+\theta)=\frac{\tanh\theta_1+\tanh\theta}{1+\tanh\theta_1\tanh\theta}=\tanh\theta_2$$

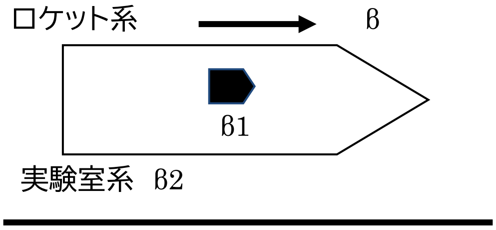
が成り立ち, 回転と同じ状況が得られた.

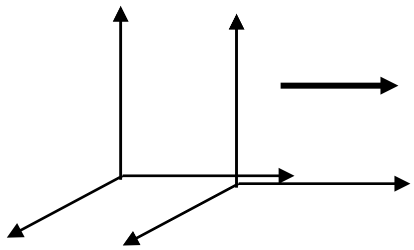
例:実験室系とロケット系の相対速度

$\beta=\frac{v}{c}=\frac{3}{4}$:実験室に対するロケットの速度, $\beta_1=\frac{v}{c}=\frac{2}{5}$:ロケット内での弾丸の発射速度

このとき, β_2:実験室から観測される弾丸の速度?

$\beta_1+\beta\neq\beta_2, \frac{3}{4}+\frac{2}{5}\neq\frac{21}{20}>1$?であるが, $\tanh(\theta_1+\theta)=\dfrac{\frac{2}{5}+\frac{3}{4}}{1+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{19}{26}=\tanh\theta_2$





5.3 物理への応用(等加速度運動:斜方投射)

地上から水平と角 θ をなす斜め上方に $\mathbf{v}_0$ を初速度で物体を投げ上げる現象を考える. これは高等学校の物理においては, 力学(力と運動)における基本問題である(図 9).

通常, 高等学校ではベクトル表現を用いないが, やはりベクトルで表示したほうが合理的である.

つまり, $\mathbf{r}$ を位置ベクトル, $\mathbf{v}$ を速度ベクトル, $\mathbf{v}_0$ を初速度ベクトル, $\mathbf{g}$ を重力加速度ベクトルとするとき,

$$\mathbf{r}=\mathbf{v}_o t+\tfrac{1}{2}\mathbf{g}\,t^2, \quad \mathbf{v}=\mathbf{v}_o+\mathbf{g}\,t \ \text{より}$$

$$\mathbf{v}+\mathbf{v}_o=\tfrac{2\mathrm{r}}{\mathrm{t}}, \quad \mathbf{v}-\mathbf{v}_o=\mathbf{g}\,\mathrm{t}.$$

が成立する(図 10).

図 9

さらに上式を幾何積で計算すると,

$$(\mathbf{v}+\mathbf{v}_o)(\mathbf{v}-\mathbf{v}_o)=\mathbf{2}\boldsymbol{rg} \ \text{より}$$

$$(\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{v}_0^2)+\mathbf{2}\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}_o=\mathbf{2}(\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{g}+\boldsymbol{r}\wedge\mathbf{g}).$$

スカラー部と 2 - ベクトル部を比較し, さらに r を水平 (r = 0)にとると,

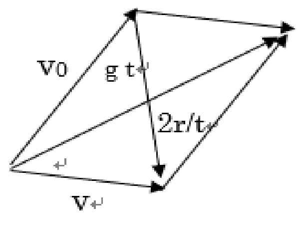


図 10

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{g}=0\rightarrow \boldsymbol{v}^2=\boldsymbol{v}_0^2\,,\qquad |\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}_0|=|\,\boldsymbol{r}\wedge\mathbf{g}\,|=rg.$$

これは, $v_0^2\sin 2\theta = rg \quad\rightarrow\quad r=\dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$

と水平距離を求める公式を得ることができる(θ は投げ上げ角:2θ は最終到達地点における $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_0$のなす角). ヘステネス(David Hestenes)は幾何積をベースとした大学初年級の力学の教科書を作成した[2].

VI:コンピュータソフトの利用

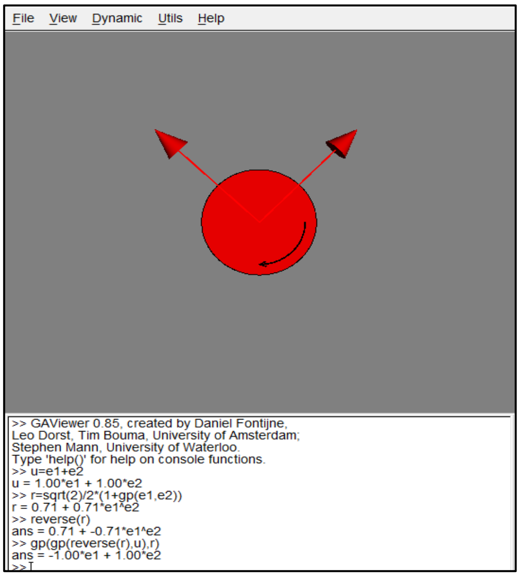
4-5 で述べた幾何積を用いた回転の計算は手動では大変であるが幾何代数専用のコンピュータソフトである GAViwer[3]を用いることで幾何積の計算が楽に出来る.

【計算コマンド例】

〇2 次元回転:e1,e2:正規直交基底

u = e1+e2 を原点 o を回転軸として 90 度回転させる場合:

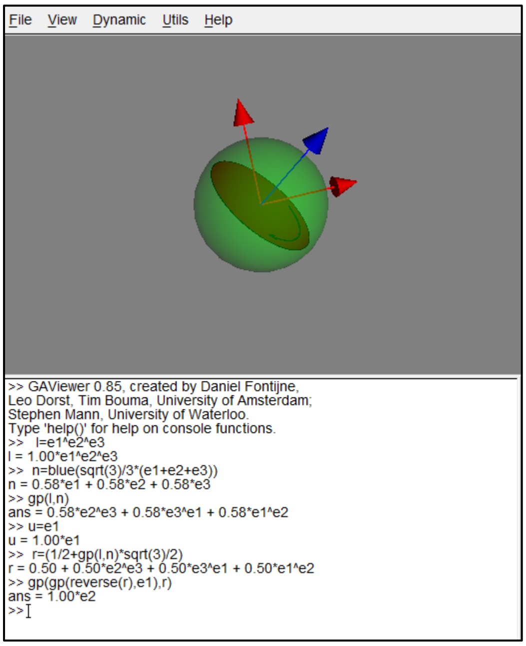
```
 >> u = e1 + e2                        # 回転前
  u = 1.00*e1+1.00*e2
 >> r = sqrt(2)/2*(1+gp(e1,e2))        # 作用素 R
  r = 0.71+0.71*e1^e2
 >> reverse(r)                         # R-1
   ans = 0.71-0.71*e1^e2
 >> gp(gp(reverse(r),u),r)             # 公式 R-1AR
   ans = -1.00*e1 + 1.00*e2            # 回転後
```



〇3 次元回転:e1,e2,e3:正規直交基底

e1 を法線方向 e1+e2+e3 を回転軸として 120 度回転させる場合:

```
>> I = e1^e2^e3                    # 単位擬スカラー
   I = 1.00*e1^e2^e3
>> n = sqrt(3)/3*(e1+e2+e3)        # 回転軸
 n = 0.58*e1+0.58*e2+0.58*e3
>> gp(I,n)                         # nI
  ans = 0.58*e2^e3+0.58*e3^e1+0.58*e1^e2
>> u = e1                          # 回転前
   u = 1.00*e1
>> r = (1/2+gp(I,n)*sqrt(3)/2)     # 作用素 R
r=0.50+0.50*e2^e3+0.50*e3^e1+0.50*e1^e2
>> gp(gp(reverse(r),e1),r)         # 公式 R-1AR
   ans = 1.00*e2                   # 回転後
```



上の 2 つの状況を図示すると, 次のようになる.

【参考文献】

幾何代数と物理学の関するもの

[H] D.Hestenes：Space-Time Algebra,Springer 2015.

[DL] C.Doran,A.Lasenby:Geometric Alegebra for physicists,Cambridge,2003.

[M] A.Macdonald：Linear and Geometric Algebra,2010.

[K] 小島順：線型代数を幾何代数に拡張する. 数理科学・数理教育研究会, 2015.

時空の幾何学に関するもの

[C] J.Callahan：The Geometry of Spacetime,時空の幾何学,Springer Tokyo,2003.

[TW] E.Taylor, J.Wheeler：Spacetime Physic, 時空の物理学, 現代数学社,1981.

幾何代数とコンピュータに関するもの

[V] J.Vince：Geometric Algebra for Computer Graphics,Springer,2010.

【引用文献】

[1] Maxwell, James Clerk : Treatize on Electricity and Magnetism,Vol1,1095.

[2] D.Hestenes：New Foundations for Classical Mechanics, Kluwer Academic.1999.

[3] GAViwer：Created by Daniel Fontijne, Leo Dorst, Tim Bouma, University of Amsterdam; Stephen Mann, University of Waterloo. https://geometricalgebra.org/gaviewer_download.html