

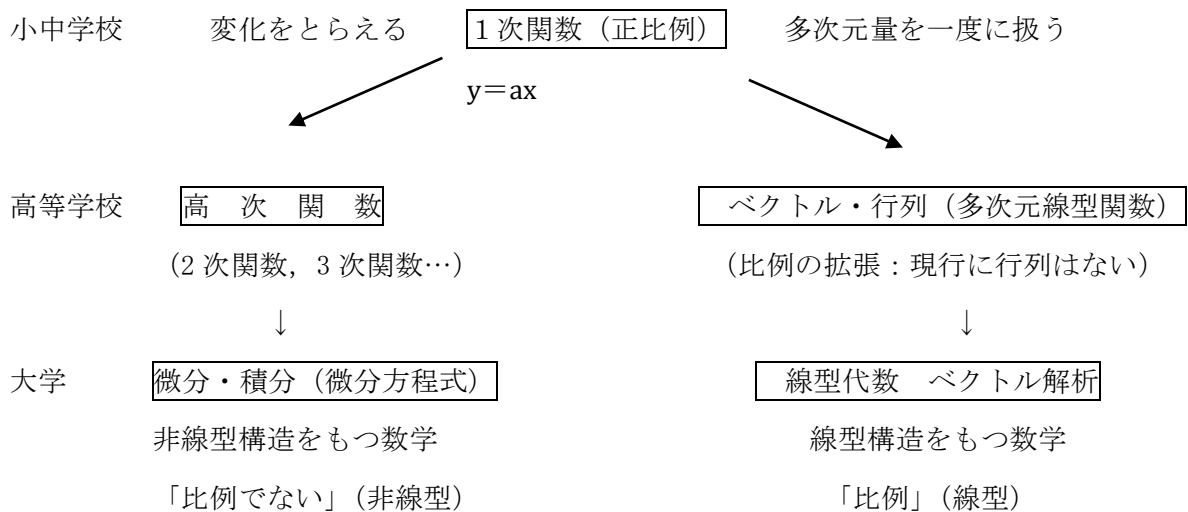
「双曲数について」

早稲田大学高等学院 武 沢 護

0 はじめに

2022 年度から高等学校では新しい指導要領が実施されている．数学において特徴的なことは，数学 B において「統計的推測」が拡充され，「ベクトル」が数学 B から数学 C へ，「平面上の曲線と複素数平面」が数学Ⅲから数学 C へ移行した．ここでは 2 つの問題点を指摘したい．

まず，この改訂は現代のデータサイエンスを基軸とした統計への軸の移動であると理解できるものの，数学における基礎的「多元量」の軽視である．統計で扱うデータの型として「ベクトル」「リスト」「配列」などは，数学的な多元量「ベクトル」が基礎であり，この重要性は軽視すべきではない．そもそも学校数学の大きな流れは，小学校の「比例」を起点として，下記のようなカリキュラムが組まれてきた．



このように，ある対象物を「多元」的に考える思考方法は重要である．

もう一つは，幾何学分野の軽視である．多くの高校生が数学Ⅰ，A，数学Ⅱ，Bを履修し，数学Ⅲ，Cが理系選択科目であると想定すると，図形におけるベクトルや複素数を用いた手法には触れずに高校生活を終えることになる．確かに高校生は限られた時間での学習ではあるが，複素数やベクトルという「代数」を用いて「幾何」を扱うというのは数学のある意味で醍醐味である．

本稿では，複素数と血縁関係にある「双曲数」を紹介し，複素数との関係，線型代数および幾何代数への入門そして物理的応用（特殊相対性理論）について試みる．

1 双曲数とは (hyperbolic number)

定義： $w \in \mathbf{H}$ が双曲数（分解型複素数：split-complex number ともいう）とは，

$$w = a + bu \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

ただし， $u^2 = 1$, $u \neq \pm 1$ を満たす (u : unipotent 冪単位元) ．

以下，複素数 $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ と同様な議論を展開する．

$$\mathbf{H} = \{w | a + u b, a, b \in \mathbb{R}, u^2 = 1, u \neq \pm 1\} = \mathbb{R}(u)$$

とおき， $w_1 = a_1 + b_1 u \in \mathbf{H}$ ， $w_2 = a_2 + b_2 u \in \mathbf{H}$ とするとき，和・差と積を次のように定義する．

$$\text{和・差} : w_1 \pm w_2 := (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) u,$$

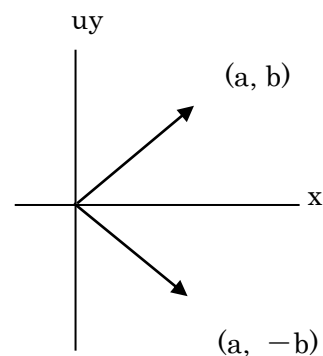
$$\text{積} : w_1 w_2 := (a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) u.$$

また，共役 (hyperbolic conjugate of w) を次のように定義する．

$$w^- := a - b u.$$

そして，大きさ (hyperbolic length of w) を

$$|w| := \sqrt{|w w^-|} = \sqrt{|a^2 - b^2|}$$



と定義するとこれは，原点 O と点 w との距離 (hyperbolic distance of the point w from O) を定義することになる．特に $w (\neq 0)$ が直線 $y = \pm x$ 上にある場合，等方的 (isotropic) といい，ベクトル $w \neq 0$ にもかかわらず $|w| = 0$ となることが特徴的であり，ローレンツ幾何を引き起こすことになる．複素数平面でのユークリッド幾何で成り立つ $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ とは大きく異なる．

また，逆数 (hyperbolic inverse of w) は，

$$w^{-1} := \frac{w^{-1}}{w w^{-1}} = \frac{a - u b}{a^2 - b^2} = \frac{a}{a^2 - b^2} - u \frac{b}{a^2 - b^2} \quad (|w| \neq 0)$$

と定義する．

1.1 双曲数の極形式

次に双曲数の極形式 (hyperbolic polar form) を考える．

指数関数

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

に対し，偶数項，奇数項それぞれに対して，

$$\cosh x := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad \sinh x := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

と双曲線関数 (hyperbolic function) を定義する．

これは，複素数と三角関数 (円関数) との関係と同様である．

$$e^{ix} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ix)^j}{j!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} + \cdots + i^n \frac{x^n}{n!} + \cdots = \cos x + i \sin x.$$

特に， u を導入することで，

$$e^{ux} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ux)^j}{j!} = 1 + ux + \frac{x^2}{2!} + \cdots + u^n \frac{x^n}{n!} + \cdots = \cosh x + u \sinh x$$

と表現できる.

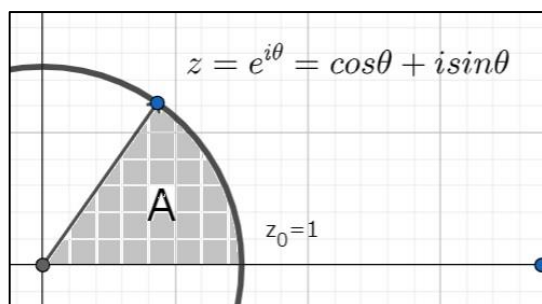
すべての複素数 $z = x + iy \in \mathbb{C}$ が極形式として,

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}, \quad \text{ただし, } r = |z| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}(y/x)$$

と表せることと同様に, 双曲数 $w = a + bu \in \mathbf{H}$ が,

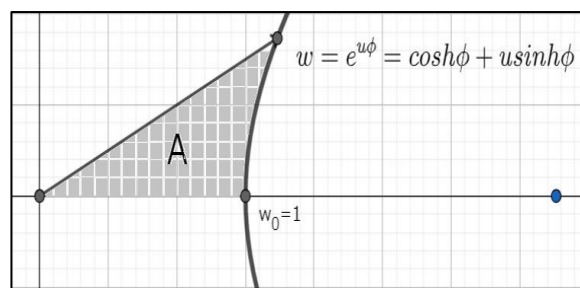
$$w = \rho(\cosh \phi + u \sinh \phi) = \rho e^{u\phi}, \quad \text{ただし, } \rho = |w| = \sqrt{|w^- w|} = \sqrt{x^2 - y^2}, \quad \phi = \tanh^{-1}(y/x)$$

と表現できる. それぞれパラメータの幾何学的意味は下図のとおりである.



$$z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

$$\text{斜線部分 A の面積} = \frac{\theta}{2}$$



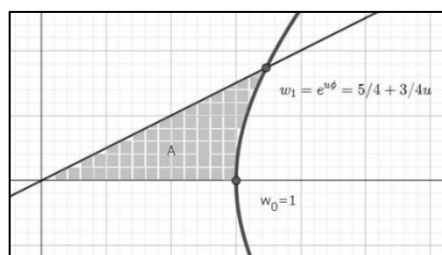
$$w = \cosh \phi + u \sinh \phi = e^{u\phi}$$

$$\text{斜線部分 A の面積} = \frac{\phi}{2}$$

例: $w = 5 + 3u$ について

解説: $w = 5 + 3u = 4(\cosh \phi + u \sinh \phi) = 4e^{u\phi}$. ただし, $\tanh \phi = \frac{3}{5} \rightarrow \phi = \tanh^{-1}(\frac{3}{5}) = \log 2$.

大きさは, $|w| = \sqrt{|5^2 - 3^2|} = 4$.



左図において, $w_0 = 1, w_1 = \frac{5}{4} + u \frac{3}{4}$ とすると,

斜線部 A の面積は $\frac{\phi}{2} = \frac{\log 2}{2}$.

また, $w_0 w_1$ の双曲線上の弧長は,

$$\int ds = \int \sqrt{|dx^2 - dy^2|} = \int_1^5 \sqrt{|1 - (\frac{dy}{dx})^2|} dx = \int_1^{\frac{5}{4}} \sqrt{|1 - (\frac{x}{y})^2|} dx = \log 2.$$

1.2 双曲数の内積と外積（共役積による導入）

複素数 $z_1 = x_1 + y_1 i \in \mathbb{C}$, $z_2 = x_2 + y_2 i \in \mathbb{C}$ に対して，共役積

$$\bar{z}_1 z_2 = (x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

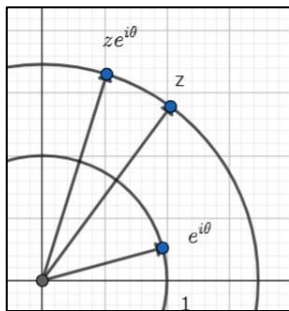
の実数部と虚数部をそれぞれ， z_1, z_2 の内積，外積と呼ぶ．

同様に， $w_1 = x_1 + y_1 u \in \mathbf{H}$, $w_2 = x_2 + y_2 u \in \mathbf{H}$ に対して，共役積

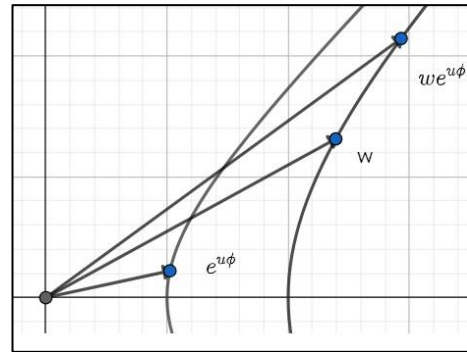
$$w_1^- w_2 = (x_1 - y_1 u)(x_2 + y_2 u) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + u(x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

の実数部と冪単部をそれぞれ， w_1, w_2 の双曲内積，双曲外積（hyperbolic inner and outer product）と呼ぶ．特に，実数部＝0 のとき，それぞれユークリッド直交，双曲直交という．また，虚数部や冪単部はともに有向面積（directed area）と呼ぶ．

1.3 回転

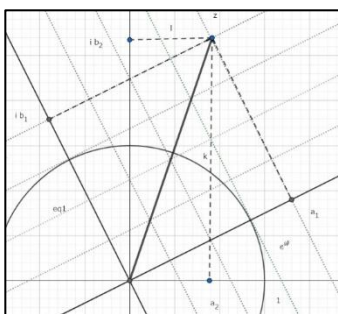


θ 回転 $z \rightarrow ze^{i\theta}$

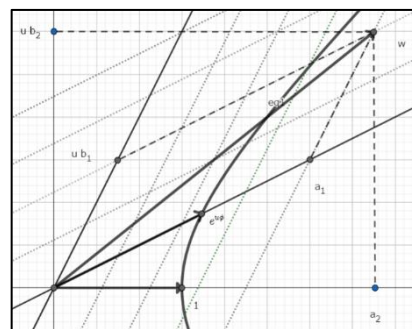


ϕ 回転 $w \rightarrow we^{u\phi}$

1.4 座標変換



$$z = a_2 + ib_2 = (a_1 + ib_1)e^{i\theta}$$



$$w = a_2 + ub_2 = (a_1 + ub_1)e^{u\phi}$$

2 行列との関係

2.1 複素数

$\mathbb{R}^2$ に次のような積を定義する． $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$(a, b) \cdot (x, y) := (ax - by, bx + ay).$$

そして， $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{C}$ を

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}; (x, y) \rightarrow x + iy \quad (i^2 = -1)$$

により同一視（体として同型）する．

これは $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に $\mathbb{C}$ 線型構造を入れることである．すなわち左作用としての

$$a + bi: x + iy \rightarrow (a + bi)(x + iy)$$

の対応を,

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}; (x, y) \rightarrow (ax - by, bx + ay)$$

と定義することで, これは行列として,

$$a + bi \Leftrightarrow aE + bI = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (I^2 = -E)$$

という対応になる．

2.2 双曲数

2.1 と同様に, $\mathbb{R}^2$ に次のような積を定義する． $(a, b) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$(a, b) \cdot (x, y) := (ax + by, bx + ay).$$

そして, $\mathbb{R}^2$ と $\mathbf{H}$ を

$$w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{H}; (x, y) \rightarrow x + uy \quad (u^2 = 1)$$

により同一視（体として同型）する．

すると一般に $\mathbb{R}$ を線型空間 X ($\mathbb{R}$ 上) に拡張したものに対して, $X^2 = X \times X$ に $\mathbf{H}$ 線型構造を入れることができる．すなわち左作用としての $a + bu$ を

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}: X \times X \rightarrow X \times X; (x, y) \rightarrow (ax + by, bx + ay)$$

と定義する．これは行列として,

$$a + bu \Leftrightarrow aE + bU = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (U^2 = E)$$

という対応になる．

3 二次形式との関係

E を n 次元線型空間, q を二次形式, b を二次形式に付随する双線型形式, $\{e_i\} \ (1 \leq i \leq n)$ は正規直交基底とする．このとき, j を線型関数, A を単位元をもつ結合的多元環 (Algebra) とするとき,

$$j: E \rightarrow A$$

$$(1) \ 1 \notin j(E),$$

$$(2) \{j(x)\}^2 = -q(x).1 \quad \text{for } \forall x \in E$$

とすると,

$$j(x)j(y) + j(y)j(x) = \{j(x+y)\}^2 - \{j(x)\}^2 - \{j(y)\}^2 = -\{q(x+y) - q(x) - q(y)\}.1 = -2b(x, y).1$$

をみたす.

例: E : 1次元正定値内積空間, $\{e_1\}$ とする. ここで,

$$q(e_1) = b(e_1, e_1) = e_1^2 = 1, \quad j(e_1) = i$$

とすれば $A \cong C$ となる.

例: E : 1次元負定値内積空間, $\{e_1\}$ とする. ここで,

$$q(e_1) = b(e_1, e_1) = e_1^2 = -1, \quad j(e_1) = u$$

とすれば $A \cong H$ となる.

4 Geometric Algebra (幾何代数) の構成と双曲数

4.1 ユークリッド幾何代数

4.1.1 1次元ユークリッド幾何代数

実数 $\mathbb{R}$ を拡張することにより次のような代数を定義する.

$$G_1 := \mathbb{R}(\mathbf{e}) = \{ \mathbf{g} \mid \mathbf{g} = g_0 + g_1 \mathbf{e}, \quad g_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \mathbf{e}^2 = 1 \}.$$

ただし, ベクトルの次元は任意であることに注意.

4.1.2 2次元ユークリッド幾何代数

2次元座標空間とベクトル空間が (2次元ユークリッド空間)

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \mathbf{x} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{ここで } \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \text{ は 2次元正規直交基底})$$

と対応し,

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2$$

に対して, 積 (幾何積) をつくる.

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2)(b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2) = a_1 b_1 \mathbf{e}_1^2 + a_2 b_2 \mathbf{e}_2^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_i^2 = 1, (i = 1, 2). \end{aligned}$$

ここで,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}), \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba})$$

とおくと,

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

と表すことができる．特に，

$\mathbf{e}_{12} := \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ とすると， $\mathbf{e}_{12}^2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1^2 \mathbf{e}_2^2 = -1$ となる．そこで，

$$\mathbf{G}_2 := \mathbb{R}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \{ \mathbf{g} \mid \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{g}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{g}_3 \mathbf{e}_{12}, \mathbf{g}_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, 3 \}$$

と定義し，標準的な和（ $\mathbb{R}$ と同様）と幾何積を導入することで 2 次元ユークリッド空間の幾何代数が構成できる．さらに $\mathbf{G}_2$ をスカラー，ベクトル，2 ベクトルの部分に直和分解さらに偶部分，奇部分に分解すると，

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2^0 \oplus \mathbf{G}_2^1 \oplus \mathbf{G}_2^2 = \mathbf{G}_2^{0+2} \oplus \mathbf{G}_2^1$$

となり，

$$\mathbf{G}_2^{0+2} = \{ \mathbf{g} \mid \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_3 \mathbf{e}_{12}, \mathbf{g}_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2 \} \simeq \mathbb{C},$$

$$\mathbf{G}_2^1 = \{ \mathbf{g} \mid \mathbf{g} = \mathbf{g}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{g}_2 \mathbf{e}_2, \mathbf{g}_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2 \} \simeq \mathbb{R}^2$$

というように， $\mathbf{G}_2$ は 2 次元ユークリッド幾何代数として，複素数平面と 2 次元ベクトル空間を統一する．

4.1.3 3 次元ユークリッド幾何代数

上と同様に議論を行う．幾何代数は次のように 3 次元だけでなく高次元への拡張も自然に行うことができる．

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \mathbf{x} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{ここで } \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \text{ は 3 次元正規直交基底})$$

と対応し，

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3$$

に対して，積（幾何積）をつくる．

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3)(b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_{23} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_{31} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_{12} \end{aligned}$$

同様に， $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \frac{1}{2}(\mathbf{a} \mathbf{b} + \mathbf{b} \mathbf{a}), \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := \frac{1}{2}(\mathbf{a} \mathbf{b} - \mathbf{b} \mathbf{a}) \quad \mathbf{e}_i^2 = 1, (i = 1, 2, 3).$

を定義し，ここで， $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{31}$ ．また， $\mathbf{I} := \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{123}$ と定義すると，

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &:= -\mathbf{I}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

とクロス積が定義できる．そこで，

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_3 &:= \mathbb{R}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \{ \mathbf{g} \mid \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{v}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{v}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{v}_3 \mathbf{e}_3 + b_{23} \mathbf{e}_{23} + b_{31} \mathbf{e}_{31} + b_{12} \mathbf{e}_{12} + t \mathbf{e}_{123} \} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{v}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{v}_3 \mathbf{e}_3, \mathbf{B} = b_{23} \mathbf{e}_{23} + b_{31} \mathbf{e}_{31} + b_{12} \mathbf{e}_{12}, \mathbf{T} = t \mathbf{e}_{123}, (\mathbf{g}_0, \mathbf{v}_3, b_{31}, t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

と定義し，3 次元ユークリッド空間の幾何代数が構成できる．

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{v} + \mathbf{B} + \mathbf{T}$$

$\mathbf{g}_0$ をスカラー, $\mathbf{v}$ をベクトル (vector), $\mathbf{B}$ を 2 ベクトル (bivector), $\mathbf{T}$ を 3 ベクトル (trivector) と呼ぶ. また, $\mathbf{I}^2 = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = -1$ となり, 擬スカラー (pseudoscalar) と呼ぶ.

4.2 非ユークリッド幾何代数 (non Euclid) : 実数空間の拡張 $\mathbb{R}^{p,q}$

実数空間での次のような代数を考える.

$$\mathbf{G}_{p,q} := \mathbb{R}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_q), \quad \text{ただし } \mathbf{e}_i^2 = 1, \mathbf{f}_j^2 = -1, \quad (1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q).$$

を考える. この次元は 2^{p+q} である. 特に重要な $\{p, q\} = \{0, 1, 2\}$ を代数を構成する.

4.2.1 $p = 1, q = 1$ の時

$$\mathbf{G}_{1,1} := \mathbb{R}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \{\mathbf{g} \mid \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 \mathbf{e} + \mathbf{g}_2 \mathbf{f} + \mathbf{g}_3 \mathbf{ef}, \mathbf{g}_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, 3\}.$$

そして特に, $\mathbf{u} := \mathbf{ef}$ とおくと, $\mathbf{u}^2 = (\mathbf{ef})(\mathbf{ef}) = 1$

となる. この部分代数

$$\mathbf{G}_{1,1}^{0+2} := \mathbb{R}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \{\mathbf{g} \mid \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_3 \mathbf{ef}, \mathbf{g}_i \in \mathbb{R}, i = 0, 2\} \subset \mathbf{G}_{1,1}$$

なので, 双曲型数

$$\mathbf{H} := \{\mathbf{g} \mid \mathbf{g} = x + y\mathbf{u}, x, y \in \mathbb{R}\}, \quad \text{すなわち } \mathbf{G}_{1,1}^{0+2} \simeq \mathbf{H} \text{ である.}$$

4.2.2 $p = 0, q = 1$ の時

次に

$$\mathbf{G}_{0,1} := \mathbb{R}(\mathbf{f}) = \{\mathbf{g} \mid \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_2 \mathbf{f}, \mathbf{g}_i \in \mathbb{R}, i = 0, 2\}$$

なので,

$$\mathbb{C} = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = x + \mathbf{i}y, x, y \in \mathbb{R}\} \text{ すなわち } \mathbf{G}_{0,1} \simeq \mathbb{C} \text{ である.}$$

4.2.3 $p = 1, q = 0$ の時

$$\mathbf{G}_{1,0} := \mathbb{R}(\mathbf{e}) = \{\mathbf{g} \mid \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 \mathbf{e}, \mathbf{g}_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1\}$$

より,

$$\mathbf{H} := \{\mathbf{g} \mid \mathbf{g} = x + y\mathbf{u}, x, y \in \mathbb{R}\}, \quad \text{すなわち } \mathbf{G}_{1,0} \simeq \mathbf{H}$$

と別な $\mathbf{H}$ の表現が得られる.

4.2.4 $p = 0, q = 2$ の時

$$\mathbf{G}_{0,2} := \mathbb{R}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \{\mathbf{g} \mid \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 \mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_2 \mathbf{f}_2 + \mathbf{g}_{12} \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2, \mathbf{g}_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, 3\}$$

により,

$$\mathbf{Q} = \{\mathbf{q} \mid \mathbf{q} = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}, \mathbf{g}_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, 3\} \quad \text{ただし, } \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{j}\mathbf{k} = \mathbf{k}\mathbf{i}.$$

と四元数を幾何代数で表現できる.

3 特殊相対性理論に向けて (2次元時空を例に)

3.1 ローレンツ変換

事象 X に対して, 時刻 t , 位置 x ($t, x \in \mathbb{R}$) とするとき,

$$X = ct + ux \quad (u: \text{hyperbolic unit}, c: \text{光速})$$

と双曲数の要素 $X \in \mathbf{H}$ として表現する.

このとき, 別の座標系での表現を

$$X' = ct' + ux', \quad X' = X e^{u\phi}$$

とおく. すると,

$$X' X'^{-} = (X e^{-u\phi})(X e^{-u\phi})^{-} = X e^{-u\phi} X^{-} e^{u\phi} = X X^{-}$$

が成り立ち, 成分表示すると,

$$X' X'^{-} = (ct' + ux')(ct' - ux') = c^2 t'^2 - x'^2, \quad X X^{-} = (ct + ux)(ct - ux) = c^2 t^2 - x^2$$

から, $c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2$ (ローレンツ不変) が成立することが確かめられる.

いま, $\phi = \tanh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)$ (v : 等速度) とおくと,

$$1 = \cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = \cosh^2 \phi \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

よって, $\cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$. ただし, $\beta = \frac{v}{c}$.

$$\begin{aligned} ct' + ux' &= (ct + ux) e^{-u\phi} = (ct + ux)(\cosh(-\phi) + u \sinh(-\phi)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (ct - \beta x + u(x - vt)). \end{aligned}$$

よって $ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (ct - \beta x), \quad x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (x - vt).$

行列表現では,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (*)$$

とよく知られた表現になる.

3.2 フィッツジェラルド・ローレンツ収縮 (Fitzgerald-Lorentz contraction)

ここで事象 X を実験室系に対して,

$$X = ct + ux \quad (u: \text{hyperbolic unit}, c: \text{光速})$$

と表現し, 別の座標系 X' を等速度で運動しているロケット系とする.

$$X' = ct' + ux' \quad X' = X e^{u\phi}$$

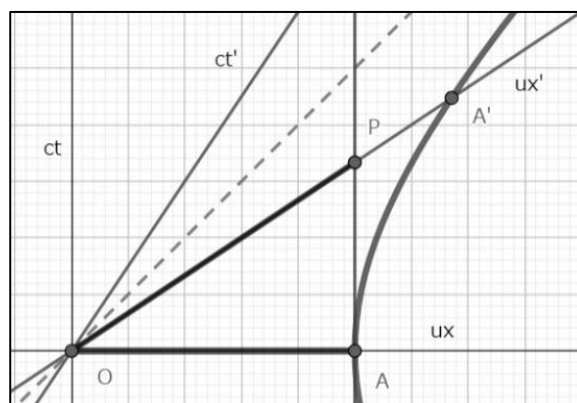
ここで、点 $P(1, ct_0)$ in X とすると、 $P(x', 0)$ in X' となる. (*) より

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} ct_0 - \beta \\ -\beta ct_0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x' \end{pmatrix}$$

$$ct_0 = \beta, \quad x' = \frac{1-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{1-\beta^2} < 1.$$

よって、 $P(\sqrt{1-\beta^2}, 0)$.

このようにフィッツジェラルド・ローレンツ収縮が確認できる.



4 最後に

今後は、この i や u を含む次元を一般化できる代数系すなわち、幾何代数もしくはクリフォード代数へ拡張することでベクトルや線型代数を見直すことが課題となる.

【参考文献】

- [C] J.Callahan : The Geometry of Spacetime,時空の幾何学,Springer Tokyo,2003.
- [DL] C.Doran,A.Lasenby:Geometric Algebra for physicists,Cambridge,2003.
- [H] D.Hestenes : New Foundations for Classical Mechanics, Kluwer Academic.1999.
- [H] D.Hestenes : Space-Time Algebra,Springer 2015.
- [K] 小島順 : 線型代数を幾何代数に拡張する. 数理科学・数理教育研究会, 2015.
- [M] A.Macdonald : Linear and Geometric Algebra,2010.
- [S] G.Sobczyk : Matrix Gateway to Geometric Algebra, Spacetime and Spinors,2019.
- [TW] E.Taylor, J.Wheeler : Spacetime Physics, 時空の物理学, 現代数学社,1981.
- [TW] 武沢, 渡辺, 「中等教育での歴史をふまえた数理科学の視点を持ったカリキュラム研究Ⅱ」
早稲田大学数学教育学会誌, 2019, 26-36.