

マクロソフトの三角形

—球面三角形の面積を Mathematica で求める—

1：はじめに（小田切貴秀氏の Web サイトを拝見して）

問題： $\triangle ABC$ において、辺 AC 上に点 D を $AC \perp BD$ となるようにとる。
 $AC=10$, $BD=6$ とするとき、 $\triangle ABC$ の面積を求めよ（図 1）。

これはあるマイクロソフト社の入社試験の問題として有名である¹⁾。

今回、小田切氏の意欲的な Web サイトを拝見し、ここでは Mathematica を用いて数値計算を実行した（氏は EXCEL で計算実行している）。

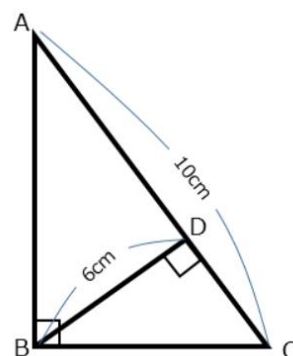


図 1

実際は、このような三角形は 2 次元ユークリッド平面上に実現することはできず、面積を求めることはできない。

実際には、円の内接三角形を考えることでわかるが（図 2）、

$AB = c$, $BC = a$, $CA = 10$, $CD = t$, $DA = 10 - t$ において、

$\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ のピュタゴラスの定理を適用すると、

$$\triangle ABC : 10^2 = a^2 + c^2,$$

$$\triangle ABD : c^2 = (10 - t)^2 + 6^2,$$

$$\triangle BCD : a^2 = t^2 + 6^2.$$

上記の三式を連立させると、

$$t^2 - 10t + 36 = 0$$

となり、これを満たす実数 t は存在しないからである。ここでは、この問題を非ユークリッド幾何（特に球面幾何）の観点から考察しよう。

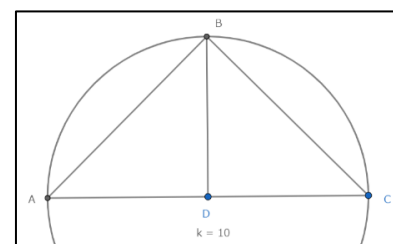


図 2

2：2 次元ユークリッド平面 E^2 上での幾何学を復習しよう

図形や幾何の扱いは通常、次の 3 つの場合がある。まずは古典的なユークリッド平面（計量なし）として、次に、実数体 R を導入するデカルト座標平面（空間）、そして、計量（内積）を入れたベクトル平面（空間）である。いずれの 3 つの場合ともユークリッド平面（空間）として議論できる。ここでは便宜上、計量を入れた 2 次元ユークリッド平面を考え、 E^2 と表すことにする。

2.1 まずは線分・直線とは何か？

ユークリッド原論では「線とは幅のない長さ」と定義されるが、実数体 R と対応させて実座標系で計量化するのが自然である。線分 AB を考える場合、1 次元では $A(x_1), B(x_2)$ と数直線そのものである。2 次元では R^2 上 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ として、2 点 A, B を通る直線上の点 $P(x, y)$ は、1 次関数

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

と表現できる。線型空間 R さらに R^n として考えると、ベクトルでは、 O を原点として、

$$\overrightarrow{OP} = s \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OB} \quad (s + t = 1)$$

と次元に関係ない表現になる。

2.2 次に 2 点 A, B 間の距離をどのように考えるか？

ユークリッド平面 E^2 上の 2 点 A, B 間の距離は、2 点 A, B を結ぶ「最短経路」の長さで定義する。すなわち 2 点を結ぶ「線分の長さ」が 2 点間の距離になる。

実座標系では、 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ とすると、2 点 A, B 間の距離は、

$$AB := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

と定義される。ベクトル空間としては、正定値の内積すなわち $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2)$ とするとき、

$$p_1 \cdot p_2 := x_1 x_2 + y_1 y_2$$

で定めることで、 $\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ に対し、

$$|AB| := \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

と定義する。

2.3 2 直線がなす角をどう測るのか？

角の概念にはいろいろあるが、ここでは、ユークリッド幾何における定義を踏まえて正定値の内積により定義する。すなわち 2 直線の方法ベクトルをそれぞれ p_1, p_2 とするとき、

$$\cos \theta := \frac{p_1 \cdot p_2}{|p_1| |p_2|}$$

で定める。「内積で定義する」とは、順序が逆、すなわち高等学校では、角度が与えられた前提で内積を定義した経験があるが、実は一般的な曲面上では内積（計量）を定義してから角を測る。

2.4 ユークリッド平面 E^2 上における正弦定理, 余弦定理, 面積

ユークリッド平面上 E^2 での正弦定理, 余弦定理, 面積は高等学校数学において学習するもので有名である.

$\triangle ABC$ においては, 次が成立する. $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ として,

$$\text{正弦定理: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 余弦定理: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \text{ 面積: } S = \frac{1}{2}ab \sin C.$$

3: 球面 S^2 上での幾何学

ユークリッド空間 E^3 内の球面 S^2 上さらには一般の曲面上になると事情が変わってくる. これらは学校数学では扱われることがないが, 非常に面白い概念である. そもそも, 直線, 2点間の距離, 2直線のなす角ということの再定義が迫られる.

3.1 2点を結ぶ「直線」

曲面上では「直線」という概念が見直される. 一般的な曲面上では, 「曲がっていない曲線」とも言える (測地的曲率=0) の「測地線」というものに置きかわる. 特に, 球面 S^2 上での2点を結ぶ「直線 (線分)」は, 球面 S^2 の中心を通る平面と球面 S^2 との共通部分「大円」の一部ということにする.

3.2 2点間の距離

球面 S^2 上においても2点間の距離は2点を結ぶ「最短経路」すなわち「最短の曲線の長さ」と定義する. この定義によると, ユークリッド平面 E^2 上では, 2点を結ぶ「線分の長さ」に対応する. 球面 S^2 上においては, 2点間の距離を「2点を両端とする大円の弧の短い方 (劣弧) の長さ」と定義する.

3.3 2曲線のなす角

球面 S^2 上において, 2曲線 L_1, L_2 が1点 P で交わるとき, 点 P でのなす角は次のように定義する. 点 P における L_1, L_2 の接ベクトルをそれぞれ v_1, v_2 とすると内積 $v_1 \cdot v_2$ を定義した上で,

$$\cos \theta := \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1| |v_2|}$$

で定める. ただし, この内積は正定値の内積すなわち, $v_1 = (x_1, x_2, x_3), v_2 = (y_1, y_2, y_3)$ とするとき,

$$v_1 \cdot v_2 := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

である.

3.4 正弦定理, 余弦定理, 面積の公式

球面 S^2 上に作られた $\triangle ABC$ において原点 O , 球の半径 $=r$, $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, $\angle BOC=\alpha$, $\angle COA=\beta$, $\angle AOB=\gamma$ とする (図 3).

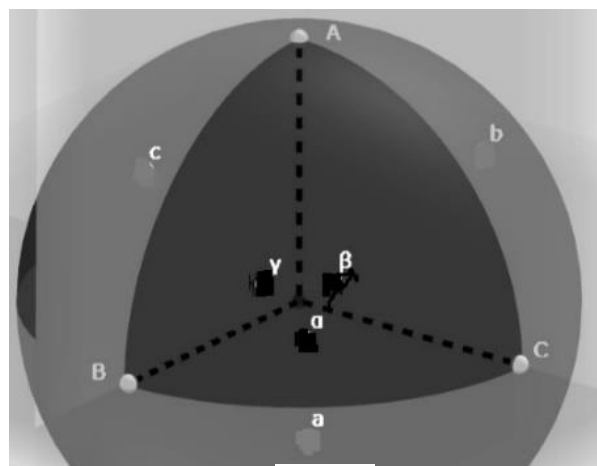


図 3

すると正弦定理は,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}$$

もしくは $\frac{\sin \frac{a}{r}}{\sin A} = \frac{\sin \frac{b}{r}}{\sin B} = \frac{\sin \frac{c}{r}}{\sin C}$ (r : 球面の半径)

が知られている.

また, 余弦定理は

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A$$

となる. さらに面積は,

$$\triangle ABC = r^2 (A + B + C - \pi)$$

となり, これは Gauss Bonnet の定理として有名である.

4: 球面上での $\triangle ABC$ の面積問題を Mathematica (Wolfram 言語) で解く

さて, 球面 S^2 上での冒頭の $\triangle ABC$ を考える. $t=CD$ とすると下記の 3 つの直角三角形の関係は, 余弦定理 (ピュタゴラスの定理) により次の通りである.

$$\triangle ABC: \cos \frac{10}{r} = \cos \frac{a}{r} \cdot \cos \frac{c}{r} \quad \dots \textcircled{1}$$

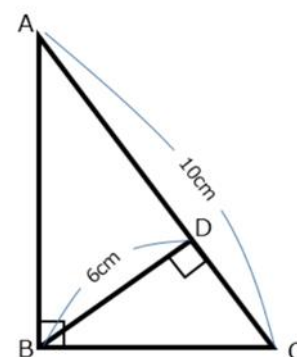
$$\triangle ABD: \cos \frac{c}{r} = \cos \frac{10-t}{r} \cdot \cos \frac{6}{r} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\triangle BCD: \cos \frac{a}{r} = \cos \frac{t}{r} \cdot \cos \frac{6}{r} \quad \dots \textcircled{3}$$

ここで①に②, ③を代入して

$$\cos \frac{10}{r} = \cos^2 \frac{6}{r} \cdot \cos \frac{10-t}{r} \cdot \cos \frac{t}{r} \quad \dots \textcircled{4}$$

により r を求める. ④に対して, $t=0, 1, \dots, 10$ の近似解を Mathematica の FindRoot コマンド



で求めると,

```
In[1] Table[FindRoot[Cos[ $\frac{10}{r}$ ] - Cos[ $\frac{t}{r}$ ] * Cos[ $\frac{6}{r}$ ]^2 * Cos[ $\frac{10-t}{r}$ ] == 0, {r, 5}], {t, 0, 10, 1}]
Out[1] {{r → 6.366197723675813}, {r → 6.778905637248351}, {r → 7.362700947319007},
{r → 8.092264397149966}, {r → 8.786812063335265}, {r → 9.090459578292455},
{r → 8.786812063335265}, {r → 8.092264397149966}, {r → 7.362700947319007},
{r → 6.778905637248351}, {r → 6.366197723675813}}
```

と計算できる.

FindRootコマンドはNewton法による近似解を求めるコマンドである. コマンド内の引数 {r,5} は近似解の起点の指示.

すなわち, 球面上可能な $\triangle ABC$ に対するCDの長さ t に対する半径 r がOut[1]で計算された.

また $\triangle ABC$ に対して正弦定理を適用すると,

$$\frac{\sin \frac{a}{r}}{\sin A} = \frac{\sin \frac{b}{r}}{\sin B} = \frac{\sin \frac{c}{r}}{\sin C} \dots \textcircled{5}$$

が成立するので, ⑤に $B = \frac{\pi}{2}$ を代入すると,

$$\frac{\sin \frac{a}{r}}{\sin A} = \sin \frac{b}{r} = \frac{\sin \frac{c}{r}}{\sin C} \dots \textcircled{6}$$

より

$$\sin A = \frac{\sin \frac{a}{r}}{\sin \frac{b}{r}}, \quad \sin C = \frac{\sin \frac{c}{r}}{\sin \frac{b}{r}} \dots \textcircled{7}$$

が成立するので, ⑦に $b = 10$ を代入すると,

$$\sin A = \frac{\sin \frac{a}{r}}{\sin \frac{10}{r}}, \quad \sin C = \frac{\sin \frac{c}{r}}{\sin \frac{10}{r}} \dots \textcircled{8}$$

となる.

一方, $\sin \frac{a}{r}, \sin \frac{c}{r}$ は②, ③より求めることができるので, ⑧に対して逆三角関数を計算することで

A, B の値が求まる.

よって△ABC の面積は

$$\triangle ABC = r^2 (A + B + C - \pi)$$

で計算できる.

実際にこれを Mathematica で triangle 関数を定義して計算すると,

```
In[2] triangle[t_] := Module[{radius, sineaa, sinecc, aaa, ccc, S},
```

$$\text{radius} = \text{FindRoot}\left[\cos\left[\frac{10}{r}\right] - \cos\left[\frac{t}{r}\right] * \cos\left[\frac{6}{r}\right]^2 * \cos\left[\frac{10-t}{r}\right] == 0, \{r, 5\}\right];$$

$$\text{sinecc} = \text{Sqrt}\left[1 - \frac{\left(\cos\left[\frac{6}{r}\right] * \cos\left[\frac{t}{r}\right]\right)^2}{\text{radius}}\right];$$

$$\text{sineaa} = \text{Sqrt}\left[1 - \frac{\left(\cos\left[\frac{6}{r}\right] * \cos\left[\frac{10-t}{r}\right]\right)^2}{\text{radius}}\right];$$

$$\text{ccc} = \text{ArcSin}\left[\frac{\text{sinecc}/\sin\left[\frac{10}{r}\right]}{\text{radius}}\right];$$

$$\text{aaa} = \text{ArcSin}\left[\frac{\text{sineaa}/\sin\left[\frac{10}{r}\right]}{\text{radius}}\right];$$

$$S = r^2 * \frac{\text{aaa} + \frac{\pi}{2} + \text{ccc} - \pi}{\text{radius}}]$$

```
In[3] Table[triangle[t], {t, 0, 10}]
```

```
Out[3] {38.1972, 35.8442, 34.0319, 32.7837, 32.0753, 31.8493, 32.0753, 32.7837, 34.0319,
35.8442, 38.1972}
```

この Out[3]により, 各 $t = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ に対する△ABC の面積を求めることができた.

例：三角形 ABC において， $C=D$ ($t=0$) の場合：

球面上， A を北極点， B, C は赤道上 $BC=6$ とする．

すると $AB=10$ は半径の 4 分の 1 より， $2\pi r=40$ ， $BC=6$ ．

よって $\triangle ABC$ の面積は，球の表面積の公式から，

$$4\pi r^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{6}{40} = \frac{120}{\pi} \approx 38.1972.$$

となり，Out[3]の結果と一致する．

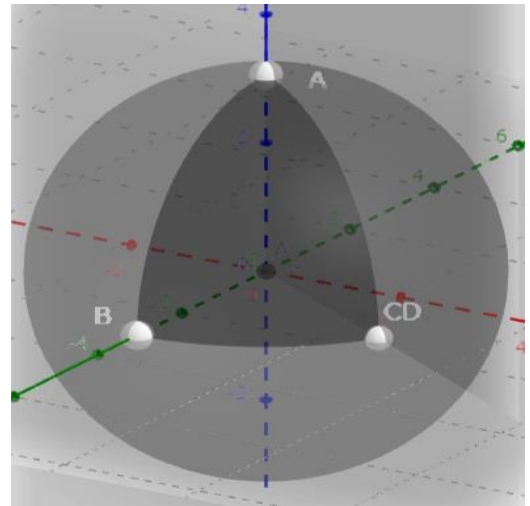


図 4

因みに，双曲面上における正弦定理，余弦定理，は次のことが成立することが知られている．

$$\frac{\sinh \alpha}{\sin A} = \frac{\sinh \beta}{\sin B} = \frac{\sinh \gamma}{\sin C}, \quad \cosh \alpha = \cosh \beta \cosh \gamma + \sinh \beta \sinh \gamma \cos A$$

これに関連して双曲幾何すなわち双曲面上での幾何も興味深い話題が多い．

【注】

- 1) 小田切貴秀，マネックス証券システム開発推進部

<https://blog.tech-monex.com/entry/2021/08/06/130000> (2024 年 9 月閲覧)

【参考文献】

[I・U] 市原一裕，牛島顕：曲がった世界の三角形の定理たち，技術評論社，2024．

[F] 深谷賢治，双曲幾何，岩波書店，2004．

[T・O] 谷口雅彦，奥村善英，双曲幾何学への招待，培風館，1996．