高等学校数学で相乗平均はどう使うのか

－正規分布から対数正規分布へ－

１：はじめに（いろいろな平均）

学校数学において，いろいろな平均に出会う．特に次の 3 つが有名である．

$$\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}, \qquad \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}, \qquad \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

相加（算術）平均　　　相乗（幾何）平均　　　調和平均

ところが相乗平均は，なかなか具体的に使用することが少ない．

例：A 組の数学の点数＝{ 63, 40, 30, 61, 79, 100, 73, 40, 0, 41, 73 }

A 組の平均点は？　54.5？（相加平均）　では相乗平均は？

例：ある都市の人口が 2005 年に 20 万人だったのが 2025 年には 40 万人に増加した．このとき，中間の 2015 年の都市の人口はどの程度であるか．ただし，人口の増加は一定とする．

$$20:\mathrm{m}=\mathrm{m}:40 \quad \text{より} \quad \sqrt{20\times 40}=28.28$$

例：東京から名古屋まで旅行した．行きは平均時速 180km のひかり，帰りは平均時速 120km のこだまを利用した．往復の平均時速はいくらか．

$$\frac{2}{\frac{1}{180}+\frac{1}{120}}=144$$

○相乗平均：対数を取ることで相加平均になる（ただし，$\mathrm{x_i}>0$）．

$$\log\sqrt[n]{\mathrm{x_1x_2\cdots x_n}}=\frac{1}{\mathrm{n}}\log \mathrm{x_1x_2\cdots x_n}=\frac{1}{\mathrm{n}}(\log \mathrm{x_1}+\log \mathrm{x_2}+\cdots\log \mathrm{x_n})$$

log($\mathrm{x_i}$ の相乗平均)＝log$\mathrm{x_i}$ の相加平均

２：「量の変換」としての対数関数

関数の働きは規則性や変化の様子をみるだけでなく，量の変換としての働きがある（人間が認識しやすいように，関数で認識を変換する)．特に対数関数は非常に重要である．それは自然界には指数モデルが多いため，対数に変換することで「線型」にできる．

問：物価が「昨年 10％増で今年 50％増の場合 2 年間では 60％増にならない」．どうしてだろうか？

これは，人間がもつ基本的は数学的認識である「線型性」にもとづく誤解であろう．
上記の例の場合の解決策として，量を対数関数で変換することで非常に分かりすいものになる．
すなわち物価に対して，「10％増 → 50％増」に対して対数をとることで，

$$\log(1.1*1.5)=\log(1.1)+\log(1.5)=0.095+0.405＝0.5=\log(1.65)$$

となり，「昨年 9.5％増えて今年 40.5％増えて 2 年間で 50％増えた」と言い換える．

また，平均増加率は $\dfrac{0.095+0.405}{2}=0.25$　すなわち $\dfrac{\log(1.1)+\log(1.5)}{2}=\log(1.65)=0.25$

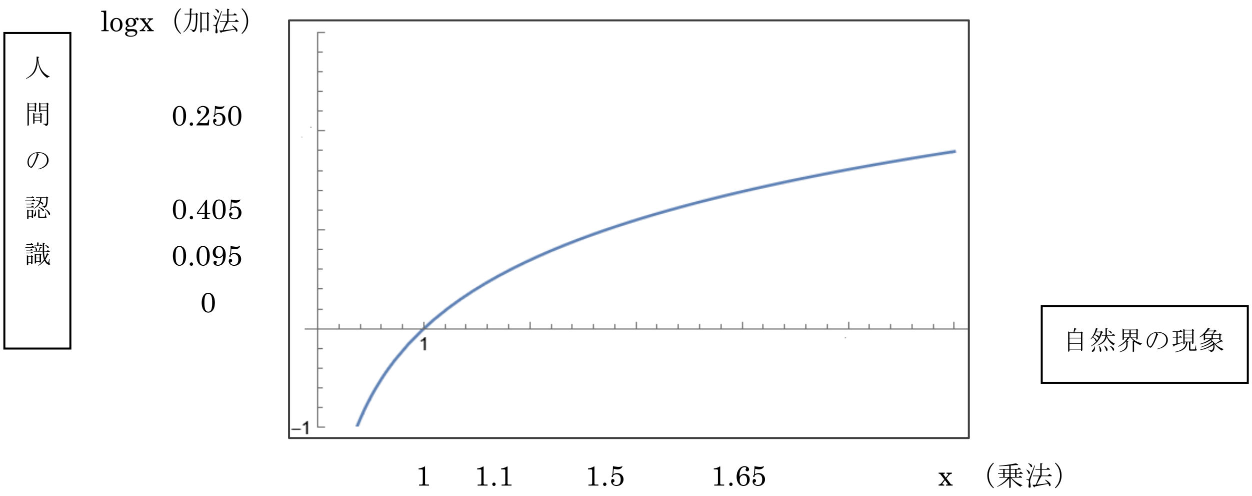


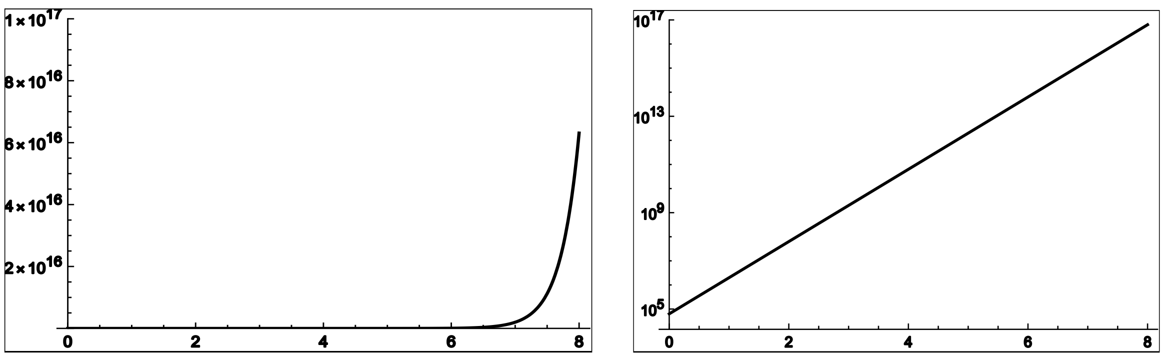
図　対数関数 log x は「乗法の世界」を「加法の世界」に変換する

【マグニチュード】（magnitude）

地震におけるマグニチュードの定義はさまざまだが，エネルギーによる一般的な定義は，E：エネルギー（単位:ジュール），M をマグニチュードとすると，

$$\mathrm{E}=10^{4.8+1.5M} \qquad \text{つまり} \qquad log_{10}\mathrm{E}=4.8+1.5\mathrm{M}$$

とする． すなわちマグニチュードが 1 増えるとエネルギーは$10^{1.5}=31.62$倍になるので，2 増えると約 1000 倍になることになる．



$\mathrm{E}=10^{4.8+1.5M}$
非線型

$log_{10}\mathrm{E}=4.8+1.5\mathrm{M}$（片対数グラフ）
線型

このように対数関数は地震のマグニチュードだけでなく，酸アルカリの pH 濃度や音の大きさデシベル(dB)など，指数関数的に変化する量を線型的に変化する単位で表示することに活用されている．

３：正規分布

定義： 確率密度関数 f(x)として,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

で定義される分布を，平均μ，分散σ^2の正規分布といい，N（μ,σ^2）で表す.

定理（中心極限定理）: 確率変数 $x_1,\cdots x_n$ が互いに独立に同一の確率分布に従うとき，その平均，分散をそれぞれ平均μ，分散σ^2とするとき，$x_1,\cdots x_n$の平均，すなわち,

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

の確率分布は，正規分布$N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$　となる．■

　これは，要するにある測定において，たくさん計測してその平均をとると標準偏差がだんだん小さくなる，すなわち精度のよい測定値が得られるということである．しかも，もとの確率変数がどんな分布でも正規分布に近づくのだから強力な定理である．そして，正規分布から派生するχ^2分布，t 分布が検定や推定の基礎となる.

3.1　正規分布がなぜ重要か

　いろいろな分布の中で，正規分布がなぜ重要かというと，日常的な現象のなかでいろいろなところに出現するからである．偶然性が高い大量なデータ（身長や大学入試センターテストなど）や複雑な原因で生じるばらつき（誤差）などの分布になることが知られている．そこでは,「中心極限定理」とうものが強力に働くからである．そもそも，正規分布を発見したのはフランスの数学者，ド・モアブル（Abraham de Moivre, 1667-1754）の功績とされ，1730 年代にド・モアブルが二項分布の n を大きくしていくと分布の形が正規曲線で近似できることを発見し，これを精密化させたのがラプラス（Pierre-Simon Laplace、1749-1827）と言われている. そしてガウス（Johann Carl Friedrich Gauss、1777-1855）が球面幾何の誤差の分布の研究で精緻化したと言われている.

例：サイコロ投げ（互いに独立なX_t）を例に（加法過程：相加平均）

　確率過程 $\{X_t\}$：X_1,　X_2,　X_3,　・・・　X_n.

　目の平均$\bar{x}$：　x_1,　$\frac{x_1+x_2}{2}$,　$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$,・・・$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$. →　3.5（by 大数の法則）

　目の平均 $\bar{x}$の試行を多数回繰り返す　→　正規分布（by 中心極限定理）　…（*）

例：大量（1 万人）の身長が正規分布になる解釈例

1 人の身長の過程：(栄養，遺伝など独立な要因）⇔n 回のサイコロを投げた平均$\bar{x}$（n 回の独立試行）

1 万人のデータ	⇔	1 万回の試行（平均$\bar{x}$を 1 万回試行）
↓		↓
正規分布		正規分布

例：相乗平均にするとどうなるだろうか.

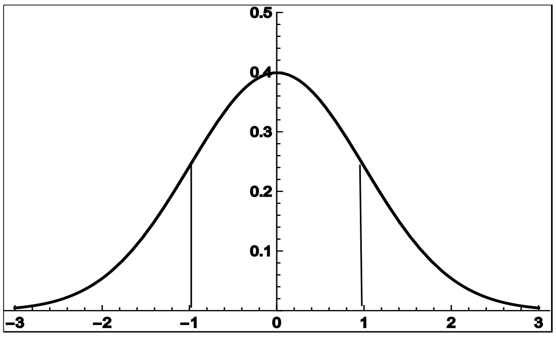
確率過程 $\{X_t\}$： X_1, X_2, X_3, ・・・ X_n.

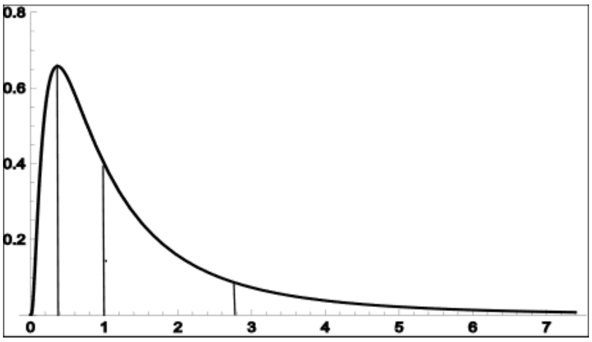
平　　均 $\bar{x}$： x_1, $\sqrt{x_1 x_2}$, $\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$, ・・・ $\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n}$.

対数平均：$\log x_1$, $\dfrac{\log x_1 + \log x_2}{2}$, $\dfrac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3}{3}$, ・・・ $\dfrac{\log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n}{n}$.

相加平均 → (*) より正規分布になるので，その分布を対数正規分布（下図）と呼ぶ.

正規分布：N(0,1)　　　　対数正規分布 Λ(0, 1)





-1　0　1　logx　　e^{-1} 1　e　x

相加平均：$\dfrac{-1+1}{2}=0$　　相乗平均：$\sqrt{e^{-1}\cdot e}=1$

変曲点の横軸座標（±1）（$\mu \pm \delta$）

注）対数正規分布 $\Lambda(\mu,\delta^2)$ のパラメータ（平均，標準偏差）表は対応する正規分布 $N(\mu,\delta^2)$ のパラメータ（平均，標準偏差）になっていることに注意.

４：正規分布から対数正規分布へ

4.1 正規分布のモデル（加算過程）

$$正規分布\ N(\mu,\delta^2),\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}}.$$

自然界や社会現象での大量の要素をもつ母集団の測定結果などの分布の基本モデル．例えば，実験観測の測定誤差は正規分布に従うと言われる．ここで大数の法則は，ある母集団から無作為抽出した標本の算術平均は標本の大きさを大きくすると母集団の母平均に近づくこと．これに対して中心極限定理は標本の算術平均の確率分布が，算術平均の標本数を大きくすると近似的に正規分布になること．

○加算過程とは：

自然科学者は複雑系などにおいて確率過程を考える．このとき，各要因を独立に等差的・線型的すなわち加法的な確率過程をたどることを「加算過程」と言っている．すなわちある複雑な現象 P に対

して各 i に対する複数の因子 P_i の形式和として次のように表現する．

$$P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n = P.$$

4.2 対数正規分布のモデル（乗算過程）

$$\text{対数正規分布}\ \Lambda(\mu,\delta^2),\quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta x} e^{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\delta^2}}.$$

これに対して，現象（複雑系など）を等差的・線型的に捉えるのではなく，自然界や人間社会に見られる等比的・非線型的に捉える場合は対数正規分布などの裾の長い分布関数（ロングテール）が観測されることが多い．例として資本主義社会での所得分布，体重の分布など．

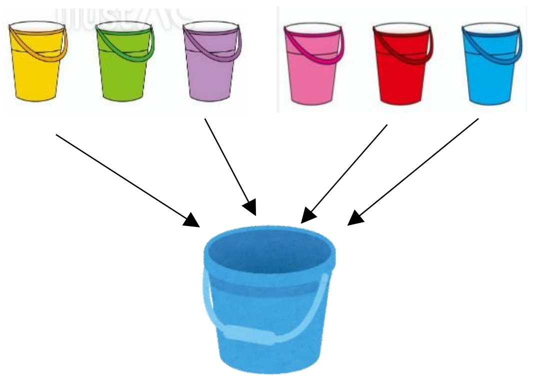
〇乗算過程とは：

加算過程と異なり，複雑系などにおいて各要因が非独立に乗法的な確率過程をたどることを「乗算過程」と言う．すなわち現象 P に対し各 i に対する複数の因子 P_i の形式積として次のように表現する．

$$P_1 \times P_2 \times P_3 \times \cdots \times P_n = P$$

4.2.1　加算過程と乗算過程の例：バケツ給水の例

0.5　0.7　0.3　‥‥‥‥‥　0.8　　　1.0　×　0.8　×　0.6　‥‥‥‥　×　0.7



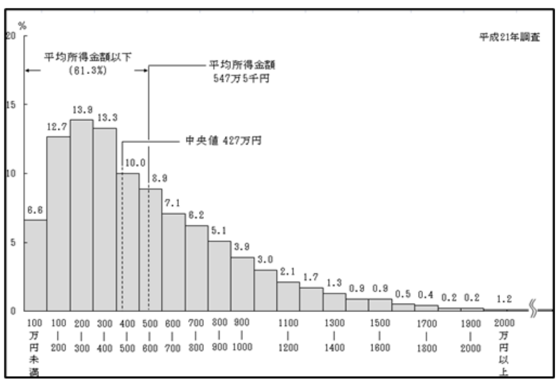
水をこぼす確率でバケツリレーする

正規分布（加算過程のイメージ）　　対数正規分布（乗算過程のイメージ）

4.3　現実社会での事例

4.3.1 所得分布

左図は所得金額階級別にみた世帯数の相対度数分布である[1]．この分布は対数正規分布に似ている．



4.4　正規分布と対数正規分布の関係

「ある確率変数が対数正規分布に従う」とは「その確率変数の対数をとったものが正規分布に従う」

ことなので，$h(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\delta^2}}$　をもとに $y=\log x$ と変数変換すると，

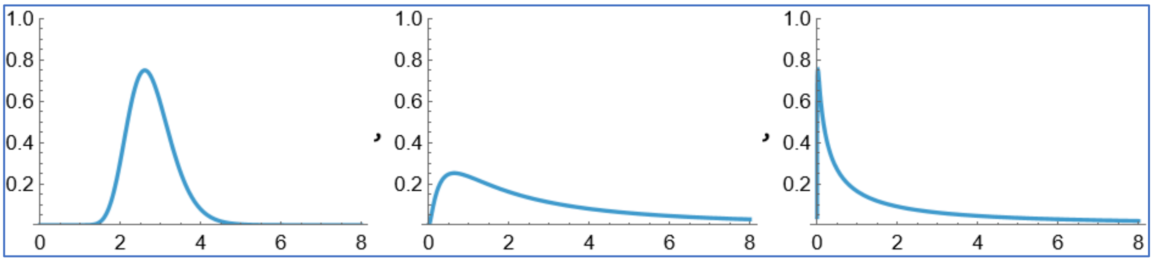
確率密度関数 g(x)：$\displaystyle\int h(y)\,dy=\int h(\log x)\frac{1}{x}dx=\int\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta x}e^{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\delta^2}}dx=\int g(x)dx$ ■

平均：$\displaystyle E(x)=\int_0^{\infty}x\,g(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^y\,h(y)dy=\cdots=e^{\mu+\frac{\delta^2}{2}}$ ■

分散：$V(x)=E(x^2)-\{E(x)\}^2=\cdots=e^{2\mu+\delta^2}(e^{\delta^2}-1)$ ■

4.5　対数正規分布 Λ(1, σ ²)

下図は対数正規分布 Λ(1, σ ²)（但し　σ ²：0.2〜2.2　step 1）の様子.



Table[Plot[*f*[1, *n*][*x*], {*x*, 0.0001, 8}, PlotRange → {0, 1}], {*n*, 0.2, 2.2}]

図 A　Λ(1, 0.2)　　図 B　Λ(1,1.2)　　図 C　Λ(1,2.2)

上図のように，この対数正規分布は標準偏差が平均と比べて小さいと正規分布に近づく（図 A).
また、標準偏差が大きい場合は「べき分布」というものに近づくことが知られている（図 C).

【引用文献】

[1] 厚生省：所得金額階級別にみた世帯数の相対度数分布，
https://www.mhlw.go.jp/toukei/saikin/hw/k-tyosa/k-tyosa09/2-2.html　(2025 年 9 月 5 日)

【参考文献】

[M] 松下貢：統計分布を知れば世界が分かる，中公新書，2019.

[K] 國仲 寛人，小林 奈央樹，松下 貢：複雑系にひそむ規則性 ：対数正規分布を軸にして，日本物理学会誌, Vol 66, pp.658-665, 2011.

[K] 河野光雄，友知政樹，佐野健一：加算的・乗算的ランダムウォークと富の偏在，総合政策研究，第 21 号，pp.37-50, 2013.

武　沢　護