

# ChatGPT と Wolfram Alpha (Wolfram GPT) との比較

## －統計的手法と記号計算手法との比較（定点観測）－

### 1. はじめに

生成 AI (Generative Artificial Intelligence) は、既存のデータセットを基にして新しいデータや情報を生成する能力を持つ AI の一分野である。現在、社会の各場面での活用やその問題点がいろいろ指摘され、とりわけ教育に与える影響は強く、教育の場面での活用に関するメリット・デメリットが議論されている。

数学的思考力がさまざまなテクノロジーにより外部依存してきたことについて、生成 AI が数学教育に与える影響について具体的な事例をもとに分析する。特に、ここでは大規模言語モデルをベースとする対話型 AI サービスである ChatGPT 4o (有料版)<sup>1)</sup> と Wolfram Alpha<sup>2)</sup> 使用し、いくつかの高等学校数学の問題解法を例に、生成 AI の技術進歩を定期的に観測しながら、数学教育への活用の可能性と問題点を考察する。

Wolfram Alpha は ChatGPT 4 のプラグインとして 2024 年 4 月 9 日に提供が終了したが、ChatGPT 4o の新たなインターフェースとして Wolfram GPT という名前で登場している。これにより ChatGPT には Wolfram Alpha および Wolfram 言語を使った強力な計算機能が追加された。

### 2. 数学教育と Mathematica

Mathematica はスティーブン・ウルフラムと彼のチームが開発し 1988 年にリリースされた数学処理システムである。個人的には 1992 年からは Mathematica 2.0 を用いた 3 次元グラフィックス描画や教材作成に使用してきた。Mathematica は 3.0 以降、日本語化や数式タイプセットの充実化などインターフェースが改善され、現在のバージョンは 14.1 (2024 年 9 月現在) である。

### 3. ChatGPT と Wolfram Alpha の比較（統計的手法と記号計算手法との比較）

Wolfram Alpha は、2009 年 5 月に公開されたウルフラム・リサーチが開発した質問応答システム。事実についての質問に対して、構造化されたデータを使って計算し、直接答を返すオンラインサービスで、ChatGPT のように大規模言語モデルを用いて答を含んでいる可能性のあるドキュメントや Web ページのリストを返すシステムとは異なる。ChatGPT がニューラルネットワークを用いた大規模言語モデルにもとづく「統計的手法」に対して、Wolfram 言語 (Mathematica) をベースにした Wolfram Alpha は「記号計算的手法」である。また、Wolfram GPT と名付けられたシステムでは、Wolfram Alpha および Wolfram 言語を介して強力な計算、正確な数学問題の解決ができるようになった。

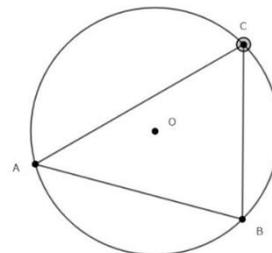
#### 4. いくつかの事例（定点観測の問題）

次に Wolfram GPT と ChatGPT 4o を用いて、いくつかの例題を考察する。特に、幾何学分野、離散数学分野、数学問題作成（確率分野）を取り上げ、2024年8月時点での得手・不得手分野を調査し、今後は定点観測的に生成AIの技術進歩を追跡する。

##### 【幾何学分野】

問題1（数学Iの三角比）2022 大学入学共通テスト数学I・数学A

点Oを中心とし、半径が5である円Oがある。この円周上に2点A, BをAB=6となるようにとる。また、円Oの円周上に、2点A, Bとは異なる点Cをとる。



- (1)  $\sin \angle ACB$  を求めよ。
- (2) 点Cを鈍角となるようにとるとき、 $\cos \angle ACB$  を求めよ。
- (3) 点Cを $\triangle ABC$ の面積が最大になるようにとる。点Cから直線ABに垂直な直線を引き、直線ABとの交点をDとすると、 $\tan \angle OAD$  と $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

この問題は数学Iでは標準的な問題である。上記の問題を ChatGPT 4o と Wolfram GPT を比較する。

○User 1：上記の問題文を入力

●回答（ChatGPT 4o：2024年8月）

この問題を解くためには、円と三角形に関する基本的な幾何学の知識を使います。順を追って解説していきます。

(1)  $\sin \angle ACB$  を求める

まず、円周上にある点A, B, Cの関係を考えると、円周角の定理から、 $\angle ACB$ は円周角です。よって、円Oの中心Oを含む $\angle AOB$ は、この $\angle ACB$ の二倍の角度になります。

•半径が5の円で、 $AB=6$ であることから、三角形OABで余弦定理を使います。

$$\text{余弦定理：} \cos \angle AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB}$$

$OA=OB=5$ 、 $AB=6$ を代入すると、

$$\cos \angle AOB = \frac{25 + 25 - 36}{50} = 0.28$$

したがって、 $\angle AOB \approx 73.74^\circ$ 。

次に、円周角の定理から、 $\angle ACB$ は $\angle AOB$ の半分なので、

$$\angle ACB = \angle AOB / 2 \approx 36.87^\circ$$

最後に、 $\sin\angle ACB$  を求めると、

$$\sin\angle ACB = \sin(36.87^\circ) \approx 0.6$$

(2) 点 C を鈍角となるようにとるとき、 $\cos\angle ACB$  を求める

C を鈍角に取るということは、 $\angle ACB$  が  $90^\circ$  を超える角度になるということです。この場合、 $\angle ACB$  は  $180^\circ - 36.87^\circ \approx 143.13^\circ$  になります。

$$\cos\angle ACB = \cos(143.13^\circ) \approx -0.8$$

(3)  $\triangle ABC$  の面積が最大になるように C をとる場合

三角形 ABC の面積が最大になるのは、C が AB の垂直二等分線上にあるときです。このとき、 $\triangle ABC$  は正三角形に近い形になります。

まず、面積を求めるために、 $\triangle ABC$  の高さを計算します。C から AB に垂線を引き、その交点を D とします。D は AB の中点にあたるため、 $AD = 3$  です。

OAD は直角三角形なので、 $\tan\angle OAD$  は次のように求められます：

$$\tan\angle OAD = \frac{OD}{OA} = \frac{\sqrt{OA^2 - AD^2}}{OA} = 0.8$$

次に、 $\triangle ABC$  の面積は底辺 AB と高さ CD を使って計算できます。高さ CD は円の半径と角度から計算でき、具体的な数値は次のようになりますが、概念的に最大になるのは高さが最も大きいときです。この場合、正三角形の形に近づくため、面積は最大で

$$\text{面積} = 1/2 \times AB \times CD \approx 12$$

これが最大の面積となります。 ■

次に同一問題を Wolfram GPT で試してみる。

●回答 (Wolfram GPT : 2024 年 8 月)

Let's break down each part of the problem:

Given Information:

- A circle O with center O and radius 5.
- Points A and B on the circle, with  $AB = 6$ .
- Another point C is also on the circle.

Part (1): Find  $\sin\angle ACB$

We can use the *sine rule for a circle*, which is based on the property that for any chord subtended by an angle at the circumference of a circle, we have the relation.

$$\sin(\angle ACB) = AB/2R$$

where R is the radius of the circle (5 in this case) and  $AB = 6$ .

Thus,

$$\sin(\angle ACB) = 6/(2 \times 5) = 0.6$$

Part (2):  $\cos \angle ACB$  when the angle is obtuse

Since we know  $\sin(\angle ACB) = 0.6$ , we can use the identity:

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

to find  $\cos(\angle ACB)$ . This gives:

$$\cos^2(\angle ACB) = 1 - \sin^2(\angle ACB) = 1 - (0.6)^2 = 1 - 0.36 = 0.64$$

Therefore,  $\cos(\angle ACB) = \pm 0.8$ . Since the angle is obtuse,  $\cos(\angle ACB)$  is negative:

$$\cos(\angle ACB) = -0.8$$

Part (3): Find  $\tan \angle OAD$  and the area of  $\triangle ABC$  when the area is maximized

(a) Area of  $\triangle ABC$  when maximized:

The area of the triangle is maximized when  $\angle ACB = 90^\circ$  (this is because the maximum height from C occurs when  $\angle ACB$  is a right angle). The area of a triangle is:

$$\text{Area} = 1/2 \times AB \times h$$

where h is the perpendicular distance from C to AB. Since C lies on the circle and  $\angle ACB = 90^\circ$ , h is the radius of the circle, i.e., 5. Thus, the maximum area is:

$$\text{Area} = 1/2 \times 6 \times 5 = 15$$

(b)  $\tan \angle OAD$

To find  $\tan \angle OAD$ , we note that D is the foot of the perpendicular from C to AB. Since O, A, and B are known, the tangent of  $\angle OAD$  can be found using trigonometric relations, specifically considering the geometry of the circle and the distances involved.

Let me calculate the exact value of  $\tan \angle OAD$  using the geometry of the circle.

< [api.wolframcloud.com](https://api.wolframcloud.com) と通信しました >

The results are:

- The maximum area of triangle ABC is 15 square units.
- The value of  $\tan \angle OAD$  is 3/4.

This completes the solution for each part of the problem. ■

以上は、2024年8月の時点での結果である。共に(1),(2)は正解し、(3)は不正解である。この出力の違いは固定されたものではないが、今回においての違いは下表のとおりであった。

2024年8月	出力言語	解法	数値	備考
ChatGPT	日本語	余弦定理	近似値	図形的センスがない。
Wolfram GPT	英語	正弦定理	厳密値	api.wolframcloud.com と通信 図形的センスがない。

基本的な三角比の問題を試してみる.

問題 2 : 三角形 ABC において, 辺 BC=2,  $\angle ABC=45$  度,  $\angle BCA=75$  度 のとき外接円の半径を求めよ.

○User : 上記問題文を入力

●回答 (Wolfram GPT ChatGPT4o ほぼ同じ)

外接円の半径  $R$  を求めるためには, 次の公式を使うことができます.

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

ここで  $a$  は三角形の一边であり, 対辺に対応する角度  $A$  はその対角です.

与えられた条件 :

$$\text{辺 } BC=2, \quad \angle ABC=45^\circ, \quad \angle BCA=75^\circ.$$

三角形の内角の和は  $180$  度ですので, 残りの角  $\angle BAC$  は以下のように求められます :

$$\angle BAC=180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$$

この情報を使って, 外接円の半径  $R$  は次のように計算できます.

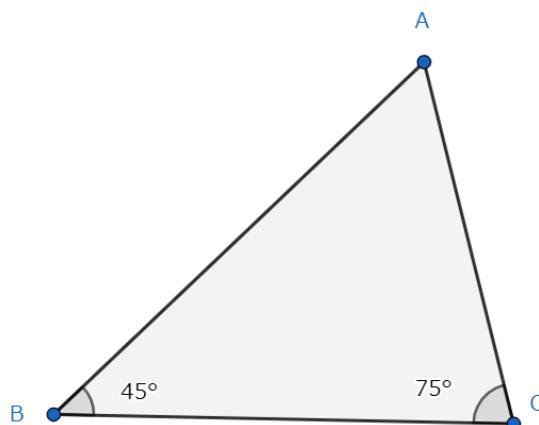
$$\frac{2}{\sin 60} = 2R$$

したがって, 外接円の半径  $R$  は

$$R = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

となります. ■

と正解を出力する.



問題3：三角形の面積

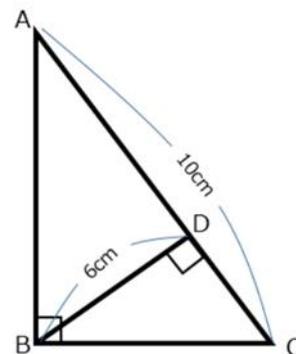
直角三角形 ABC があり、点 D を点 B から辺 AC への垂線の交点とする。∠B=90° とし、AC=10、BD=6 のとき、三角形 ABC の面積をもとめよ。

○User：上記問題文を入力

●回答：(Wolfram GPT：2024年8月)

三角形 ABC において、点 D は点 B から辺 AC に引いた垂線の交点です。与えられた情報をもとに、三角形 ABC の面積を求める手順は以下の通りです。

1. ∠B=90°、三角形 ABC は直角三角形です。
2. AC = 10, BD = 6 が与えられています。



点 D は点 B から辺 AC への垂線の交点であり、∠B=90° なので、点 D は点 B から垂直に下ろした線が AC と交わる点です。したがって、BD は三角形 ABC の高さに相当します。高さが 6 で、底辺が AC の長さ 10 なので、三角形 ABC の面積は次の式で求められます。

$$\text{面積} = \frac{1}{2} \times \text{底辺} \times \text{高さ}$$

$$\text{底辺} = AC = 10, \text{高さ} = BD = 6 \text{ なので,}$$

$$\text{面積} = \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30$$

したがって、三角形 ABC の面積は 30 です。 ■

このように特に条件を指定しないと、ユークリッド平面で計算する。このため次のようにさらに問を進めた。

○問い：非ユークリッド幾何、すなわち球面幾何で考えて下さい。

●回答：(Wolfram GPT：2024年8月)

手順1：球面三角形の内角を求める：

∠B=90° です。これは球面でも同じです。

残りの角度 ∠A と ∠C を求めるために、球面余弦定理や球面正弦定理を使用します。

手順2：余剰角を計算する：

球面三角形の面積を求めるためには、内角の和から  $\pi$  を引いた余剰角 E を計算します。

余剰角 E は次のように求められます：

$$E = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ は三角形の内角})$$

手順 3 : 球面三角形の面積を求める:

面積は次のように求められます:

$$A = R^2 \cdot E$$

ここで,  $R$  は球の半径です.

与えられた情報から具体的な内角を求め, 球面三角形の面積を計算するためには, **Wolfram Language** を使用して詳細な計算を行います.

**Wolfram Language** による計算: まず, 三角形  $ABC$  の内角を計算し, その後に球面余弦定理や球面正弦定理を使用して, 球面三角形の面積を計算します. 以下のように計算します.

(\* 球の半径を設定, 通常は単位球を使用します \*)

```
R = 1;
```

(\* 三角形の辺の長さ \*)

```
a = 6; (* BD の長さ *)
```

```
b = Sqrt[AC^2 - BD^2]; (* 直角三角形の斜辺の計算 *)
```

(\* 球面余弦定理を使用して角度を計算 \*)

```
alpha = 90 * Degree;
```

```
beta = ArcCos[(Cos[a/R] - Cos[b/R] Cos[10/R]) / (Sin[b/R] Sin[10/R]);
```

```
gamma = 180 * Degree - alpha - beta;
```

(\* 余剰角の計算 \*)

```
excessAngle = alpha + beta + gamma - Pi;
```

(\* 球面三角形の面積の計算 \*)

```
area = R^2 * excessAngle;
```

```
area
```

上記の計算は **Wolfram Cloud** で実行し, 結果を取得します. これにより, 球面幾何での三角形の面積を求めることができます. 具体的な計算を実行して結果を確認します. ■

このようにある程度, 球面幾何での手順を示唆する.

【離散数学分野】

これに対して、数列の問題を対象にする。

問題 4 : Collatz 問題

数列として自然数  $n$  に対して、 $n$  が偶数ならば  $n/2$ ,  $n$  が奇数ならば  $3n+1$  と定義する。このときの漸化式を作りなさい。

○User : 上記問題文を入力

●回答 (Wolfram GPT) :

```
Collatz[n_Integer] :=  
Module[{sequence = {n}, current = n},  
While [current != 1,  
  If [EvenQ[current],  
    current = current/2,  
    current = 3*current + 1  
  ];  
  AppendTo[sequence, current]  
];  
sequence  
]
```

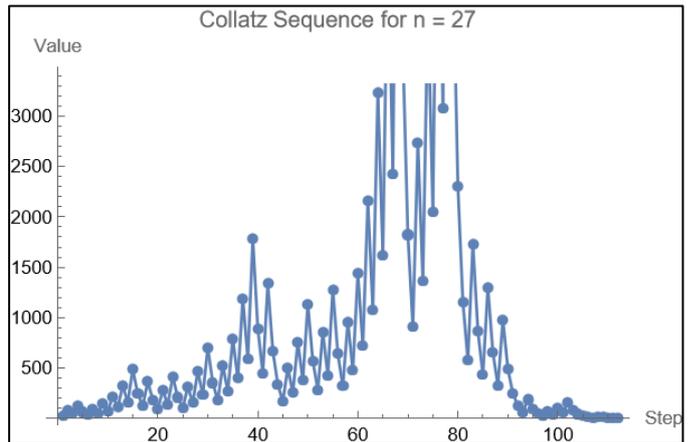


図 :  $n=27$  の時の数列の軌跡

```
VisualizeCollatzSequence[n_Integer] := Module[{seq = Collatz[n]},  
  ListLinePlot[seq, PlotMarkers -> Automatic, PlotLabel -> "Collatz Sequence for n = " <> ToString[n],  
  AxesLabel -> {"Step", "Value"} ] ]
```

VisualizeCollatzSequence[27] ■

と、Mathematica でのプログラムを作成し、ほぼ完璧に対応する。

## 【問題作成】

問題 5 (確率の問題作成):  
条件付き確率の問題を作成してください.

○User: 上記問題文を入力

●回答 (ChatGPT 4 o)

もちろんです. 以下は, 条件付き確率の問題です.

問題:

ある都市で毎日雨が降る確率は 20%です. 雨の日に限り, 友人がカフェに行く確率は 30%です. 一方, 雨でない日に限り, 友人がカフェに行く確率は 10%です. ある日に友人がカフェに行っている場合, その日が雨である確率を求めてください.

解答例:

この問題では, 条件付き確率を求める必要があります. A を「雨が降る」とし, B を「友人がカフェに行く」とします.

$$P(A) = 0.20 \text{ (雨が降る確率)}$$

$$P(B|A) = 0.30 \text{ (雨の日に友人がカフェに行く確率)}$$

$$P(B|A') = 0.10 \text{ (雨でない日に友人がカフェに行く確率)}$$

求める条件付き確率は,  $P(A|B)$ です.

条件付き確率の定義により, 以下の式が成り立ちます.

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$$

ここで,  $P(A \cap B)$ は同時確率 (A と B が同時に起こる確率) です.  $P(A \cap B)$ は, 雨が降り, かつ友人がカフェに行く確率に相当します.

$$P(A \cap B) = P(B|A) * P(A) = 0.30 * 0.20 = 0.06$$

次に,  $P(B)$ を求める必要があります. これは, 友人がカフェに行く確率ですが, 雨が降る場合と雨でない場合の両方を考慮する必要があります.

$$P(B) = P(B|A) * P(A) + P(B|A') * P(A') = 0.30 * 0.20 + 0.10 * 0.80 = 0.06 + 0.08 = 0.14$$

最後に, 条件付き確率  $P(A|B)$ を求めます.

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B) = 0.06 / 0.14 \approx 0.4286$$

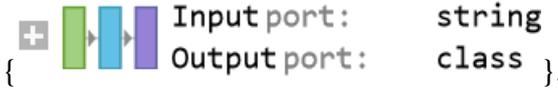
したがって, 友人がカフェに行っている日が雨である確率は約 0.4286 または約 42.86%です. ■

と, 適格な問題を生成する.

## 5. ChatGPT を Mathematica で解析する

ChatGPT の仕組みはかなりブラックボックスであるが、Mathematica13.3 以降には、これを解析する機能が追加された。下記のコマンドは GPT2 バージョンを適用している。

○言語モデルとなる GPT2 のニューラルネットを取得

```
In[1]:=model = NetModel[
    {"GPT2 Transformer Trained on WebText Data",
     "Task" -> "LanguageModeling"}
]
Out[1]=NetChain[{

    {
    }
}]
```

○ある文におけるそのあとに続く単語を確率順に検索する

下は"Mathematics is very useful for"に後続する確率が高い順に 5 語を出力する。

```
In[2]:= model["Mathematics is very useful for", {"TopProbabilities", 5}]
Out[2]= {"making" -> 0.0165166, "many" -> 0.0184672, "solving" -> 0.0209098, "the" -> 0.0306945,
         "understanding" -> 0.053919}
```

○日本語にすると

```
In[3]:= model["数学が重要である理由は、", {"TopProbabilities", 5}]
Out[3]= {"こ" -> 0.0293317, "è" -> 0.0323318, "æ" -> 0.0391474, "ã" -> 0.0608106,
         "ç" -> 0.0624191}
と、日本語への対応はまだ弱い。
```

○繰り返す

"Mathematics is very useful for"に続く、7 文を出力する。

```
In[4]:= NestList[ StringJoin[#, model[#, "Decision"]] &, "Mathematics is very useful for", 7]
Out[4]= {"Mathematics is very useful for",
         "Mathematics is very useful for understanding",
```

"Mathematics is very useful for understanding the",  
"Mathematics is very useful for understanding the nature",  
"Mathematics is very useful for understanding the nature of",  
"Mathematics is very useful for understanding the nature of the",  
"Mathematics is very useful for understanding the nature of the universe",  
"Mathematics is very useful for understanding the nature of the universe."  
}

このように大規模言語モデルが後続語句をどのような確率で探索するかが Mathematica (Wolfram 言語) で解析することができる。

## 6. 今後に向けて

数学の学習や教授法の改善として「数学とテクノロジー」の活用が生成 AI を初めとする AI やビッグデータの活用の段階になってきた。今回は ChatGPT 4o と従来の記号計算システムである Wolfram Alpha のテクノロジーとの連携を紹介したが、今後このような連携は多様になり、この手法は有効な数学解法を提供できる可能性は高い。

さらに大規模言語モデルによる数学解法は原理的に限界があるものの、このシステムを取り扱うことで、人工知能の可能性やそもそも人間が数学をどのように考えるか、数学的概念をどのように獲得するかという研究にもつながる。数学的に不完全なシステムであっても、効果的に活用する方法を考察することは重要な研究になるであろう。

### 【注】

1) ChatGPT : Chat Generative Pre-trained Transformer の略で、OpenAI 社が 2022 年 11 月に公開した大規模言語モデルをベースとする対話型 AI サービスで現在は ChatGPT 4o.

2) Wolfram Alpha : 2009 年 5 月に公開された Wolfram 社が開発した質問応答システム.

### 【参考・引用文献】

[W] S.Wolfram, What Is ChatGPT Doing ... and Why Does It Work?, Wolfram Media Inc, pp.2-6, 2023 年.

早稲田大学高等学院 武沢護 (2024 年 8 月)