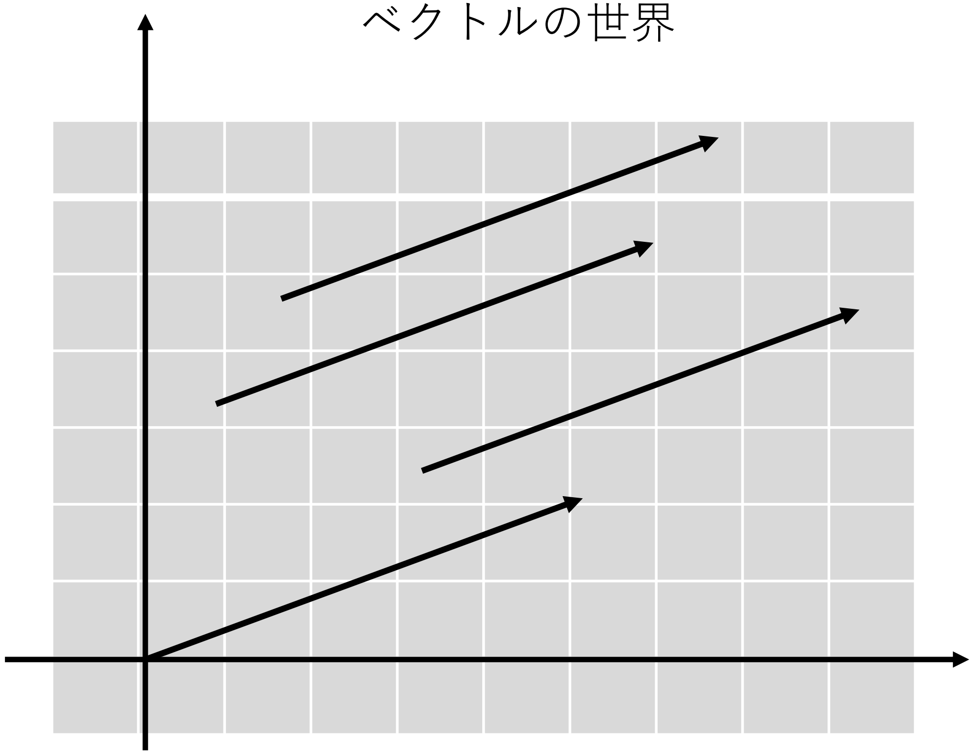
ベクトルを座標に対応させる（位置ベクトル考え方）

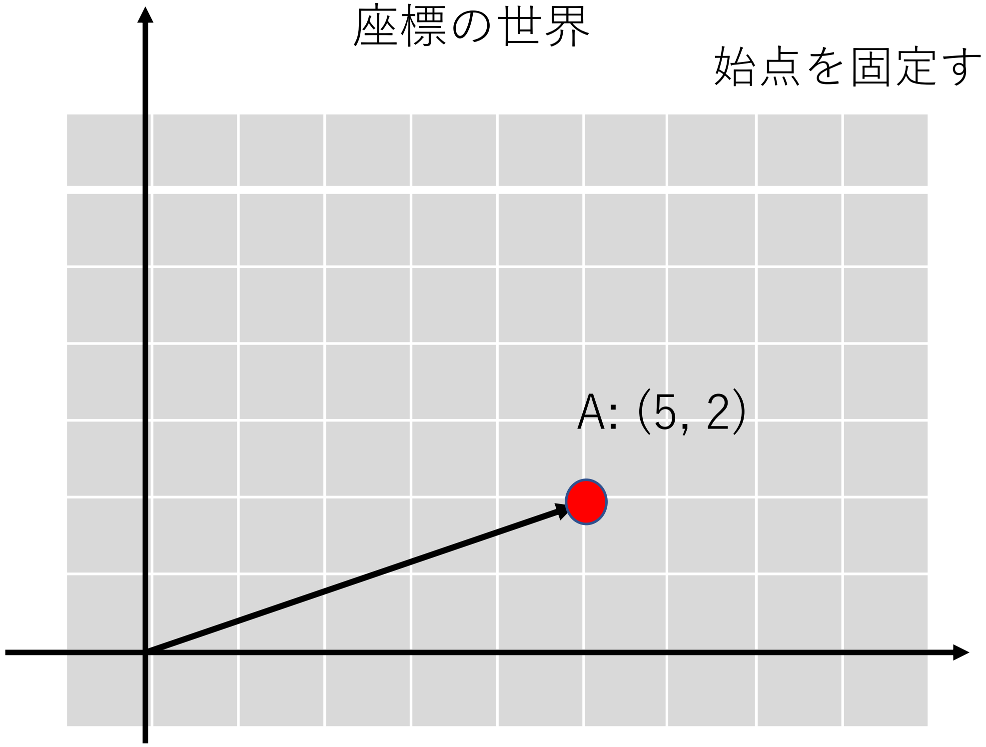
ベクトルの世界



ベクトル　$\vec{a} = (5, 2)$

座標の世界

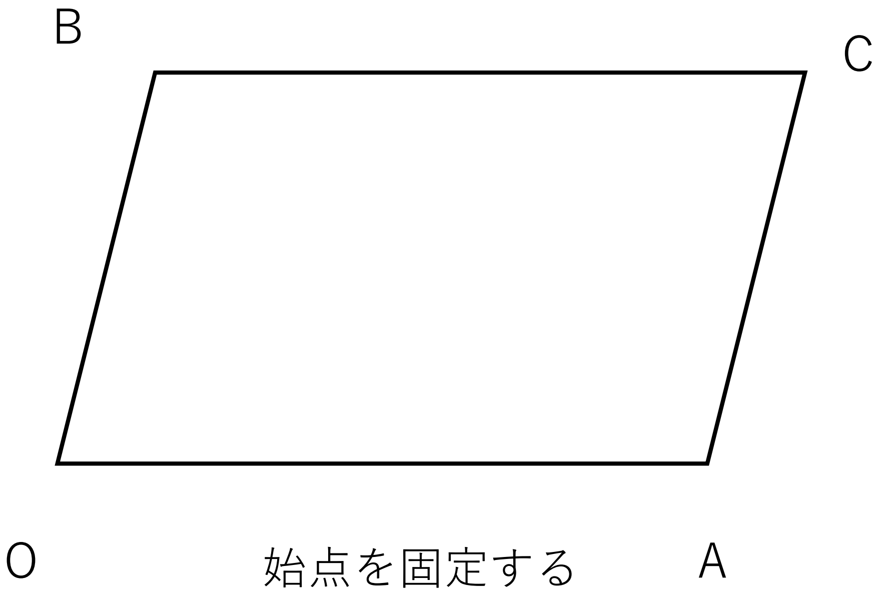
始点を固定する



$\vec{a} = (5, 2)$ ⟺ 座標 (5, 2)

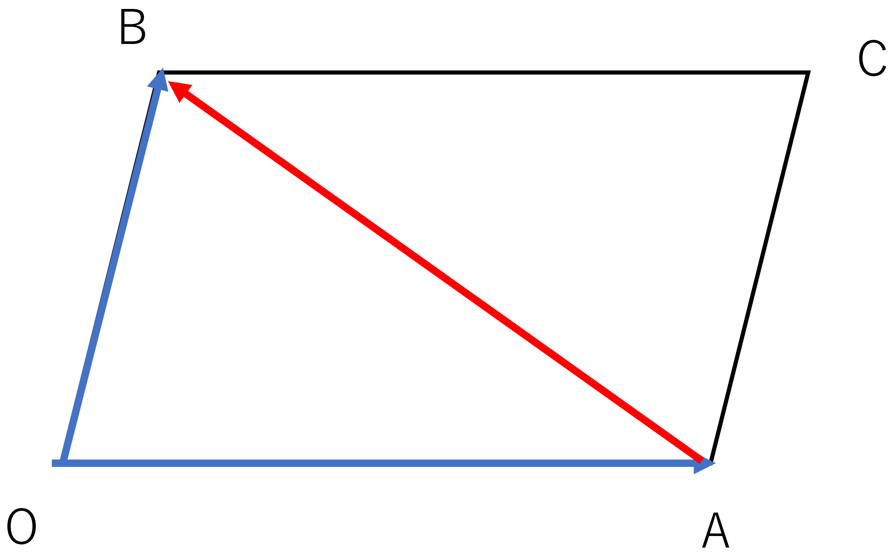
位置ベクトルでは始点を固定

図形の世界



始点を固定する

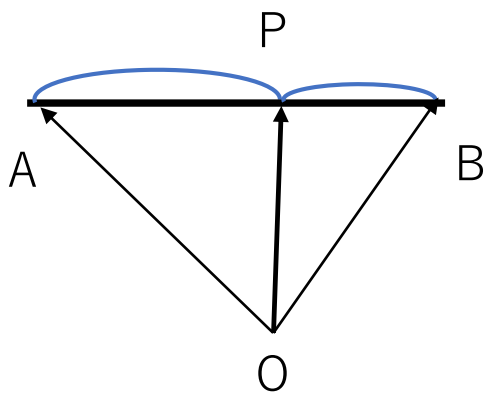
ベクトルの世界



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

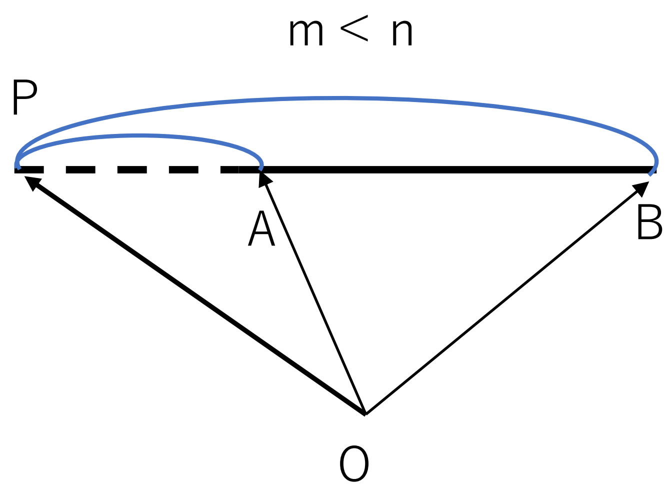
終点ー始点

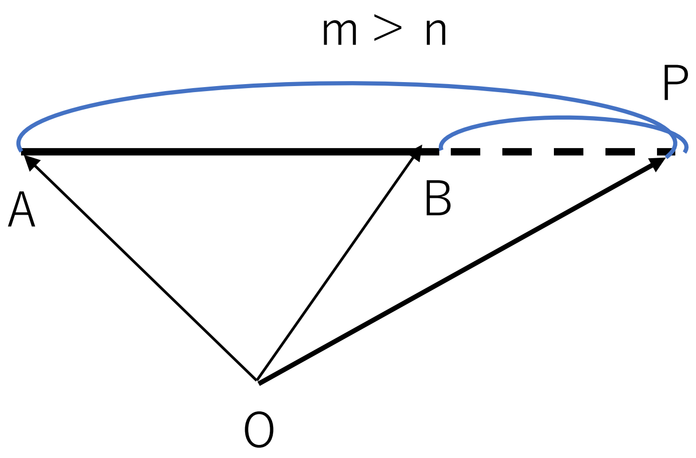
点Pが線分ABをm:nに内分



$$\overrightarrow{OP}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}$$

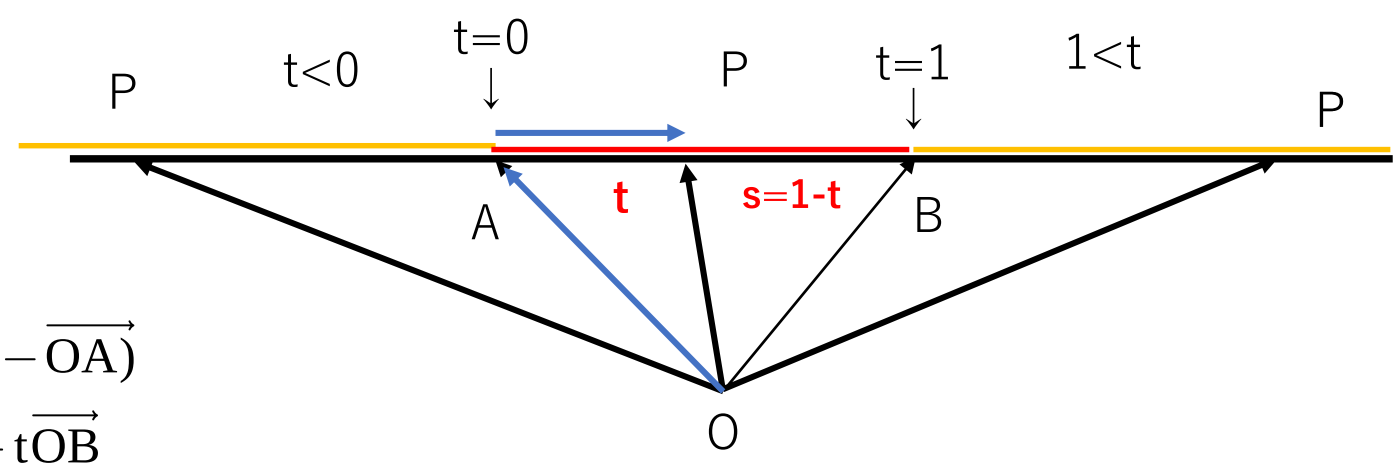
点Pが線分ABをｍ：ｎに外分





$$\overrightarrow{OP}=\frac{-n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m-n}=\frac{n\overrightarrow{OA}-m\overrightarrow{OB}}{-m+n}$$

もう少し統一的にあつかえないだろうか



$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}\quad (t\in R)$$

$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

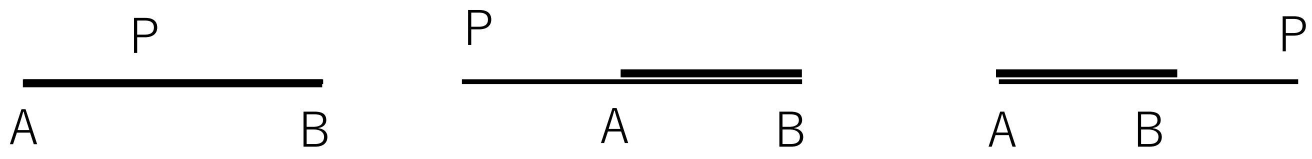
分点公式

$$\boxed{\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\quad (s+t=1)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}}$$

ただし $\dfrac{n}{m+n}=s$

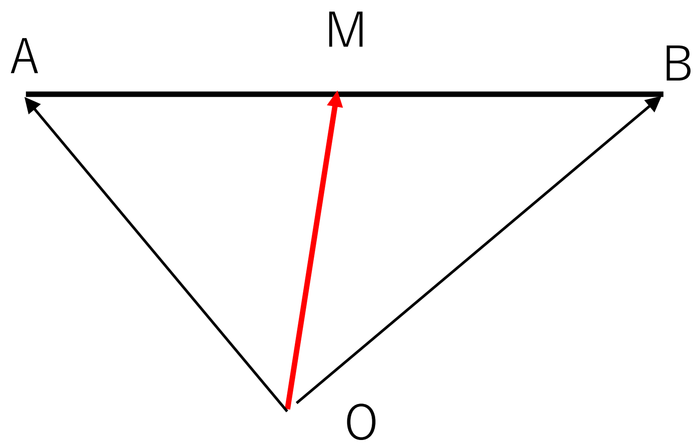
1 ： 2 に内分　　1 ： 2 に外分　　2 ： 1 に外分



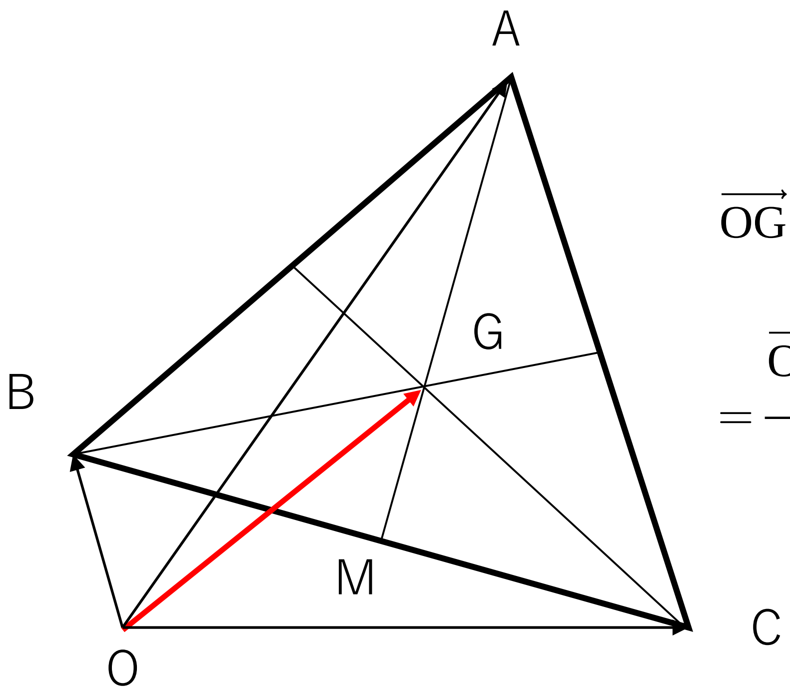
t=1/3　　t=-1　　t=2

第5節　中点と重心(p.94)

位置ベクトルでは始点を固定



線分の中点　$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$



$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM}}{3}$$

$$=\frac{\overrightarrow{OA}+2\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}}{3}$$

三角形の重心　$\boxed{\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}}$

四角形の重心はどうなだろうか？

$$\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}\ ?$$

第5節　ベクトルと直線 p.95（共線条件）

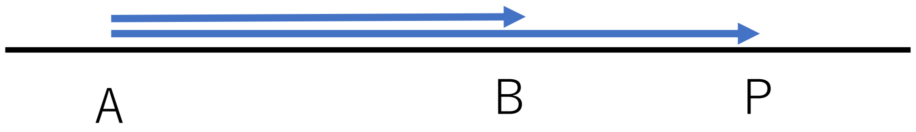
Waseda Live Math

異なる２点A，Bに対して，
3点A，B，Pが一直線上にある

$\Longleftrightarrow$

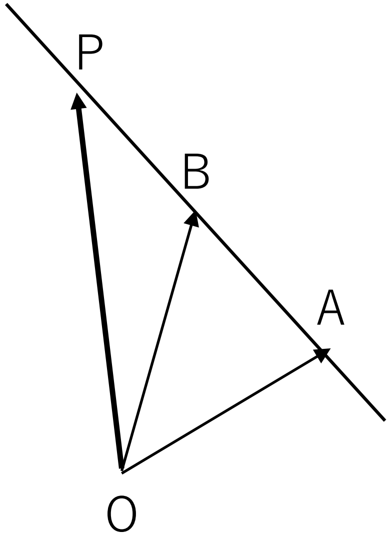
$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}\quad (t\in R)$$

$\Updownarrow$



点Pは2点A，Bを通る直線上の点

$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$
$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$



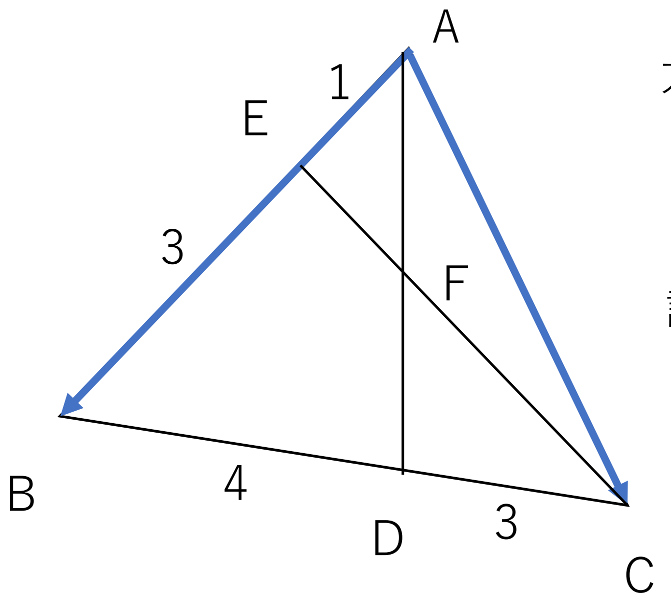
$\Updownarrow$

2点A，Bを通る直線の方程式（ベクトル方程式）

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\quad (s+t=1)$$

ポイント１：始点を設定するか（例えば，点A）

ポイント２：平面では独立な位置ベクトルを2つ設定



方針： $\overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}$ 　以下同様に $\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ とする.

証明すべきこと： $\overrightarrow{EC}=k\overrightarrow{EF} \quad (k\in R)$

証明：

$$\overrightarrow{EC}=\vec{c}-\vec{e}=\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{b}=\frac{-\vec{b}+4\vec{c}}{4}$$

$$\overrightarrow{EF}=\vec{f}-\vec{e}=\frac{7}{16}\vec{d}-\frac{1}{4}\vec{b}=\frac{7}{16}\cdot\frac{3\vec{b}+4\vec{c}}{7}-\frac{1}{4}\vec{b}$$

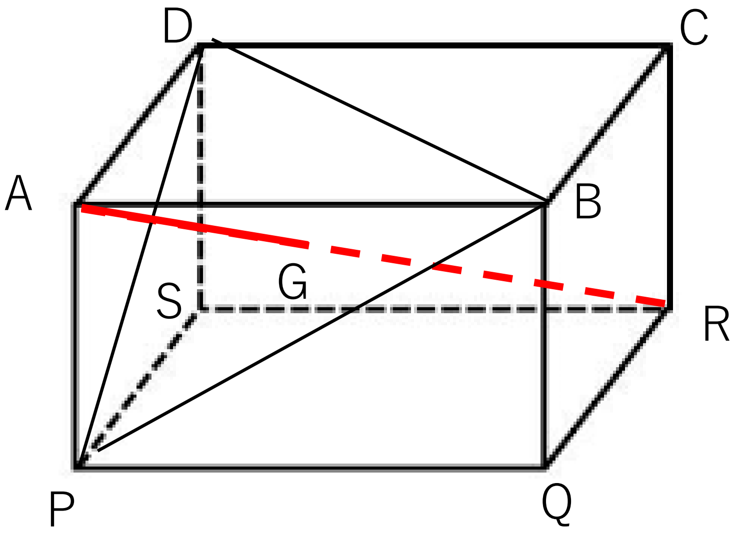
$$=\frac{3\vec{b}+4\vec{c}}{16}-\frac{4}{16}\vec{b}=\frac{-\vec{b}+4\vec{c}}{16}$$

$$\overrightarrow{EC}=4\overrightarrow{EF}$$

よって点C, E, Fは一直線上で、EF:FC=１：３

ポイント１：始点を設定するか（例えば，点A）

ポイント２：3次元空間では独立な位置ベクトルを3つ設定



方針：　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AD}=\vec{d}, \overrightarrow{AP}=\vec{p}$　以下同様に位置ベクトルに名前をつける.

証明すべきこと：　$\overrightarrow{AR}=k\overrightarrow{AG}\quad (k\in R)$

証明：　$\overrightarrow{AR}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{p}$

点Gは重心なので,

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{p}}{3}$$

$$\overrightarrow{AR}=3\overrightarrow{AG}$$

よって点A, G, Rは一直線上である.

R^2上で $\vec{0}$でなく平行でない二つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$を<u>1次独立なベクトル</u>とするとき,

すると次が言える.　$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0} \Longleftrightarrow s=t=0$

同値なこととして.　$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b} \Longleftrightarrow s=s',\quad t=t'$

R^3上で $\vec{0}$ でなく平行でない三つのベクトル　$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を<u>1次独立なベクトル</u>とするとき,

すると2次元同様に次が言える.

$$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=\vec{0} \Longleftrightarrow s=t=u=0$$

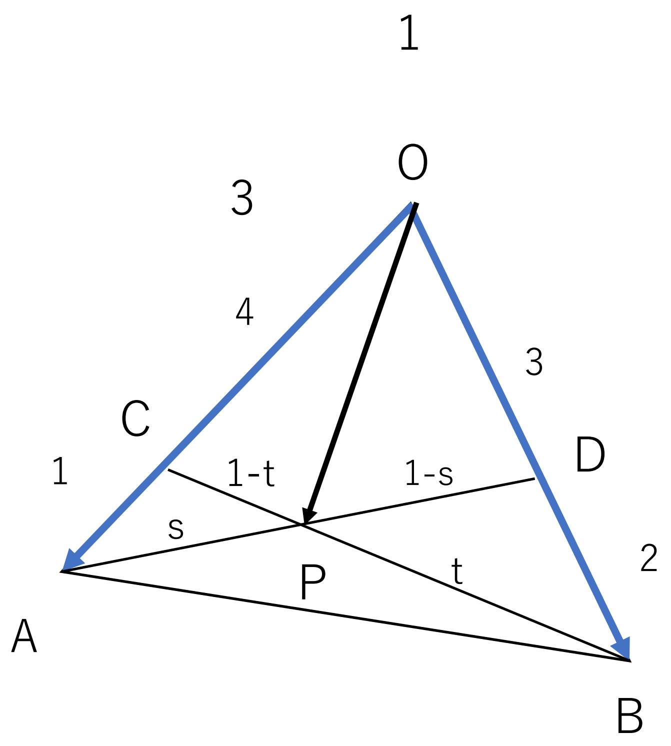
$$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s'\vec{a}+t'\vec{b}+u'\vec{c} \Longleftrightarrow s=s',\quad t=t',\quad u=u',$$

第5節　2直線の交点（例題７）p.97

ポイント１：始点を設定するか（例えば，点O）
ポイント２：平面では独立な位置ベクトルを2つ設定
ポイント３：1次独立の性質を利用

方針： $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$

とおいて，線分ADと線分BCの交点Pを $\vec{a},\vec{b}$ で表す．



解： Pが線分ADを s : 1-s と内分し，線分BCの交点Pを t : 1-t と内分するとすると分点の公式から，

$$\vec{p}=(1-s)\vec{a}+s\vec{d}=(1-s)\vec{a}+\frac{3}{5}s\vec{b}$$

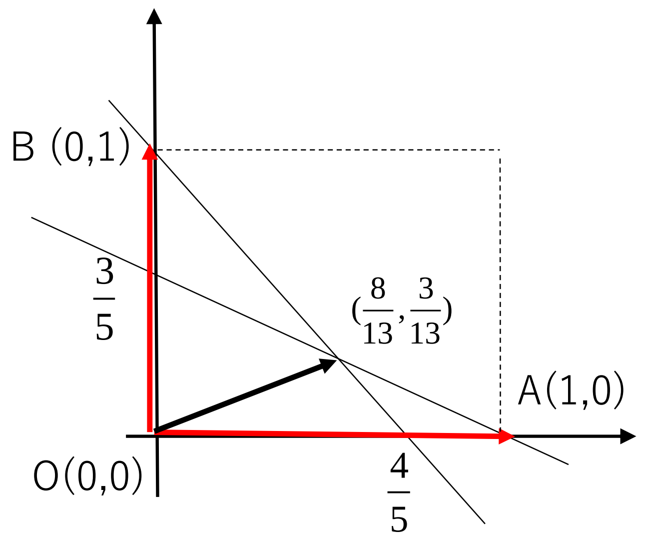
$$\vec{p}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}=(1-t)\vec{b}+\frac{4}{5}t\vec{a}$$

$\vec{a},\vec{b}$ は1次独立なベクトルなので，係数を比較して

$$1-s=\frac{4}{5}t,\quad \frac{3}{5}s=1-t$$

を解くと， $s=\dfrac{5}{13},\quad t=\dfrac{10}{13}$

$$\boxed{\vec{p}=\frac{8}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}}$$

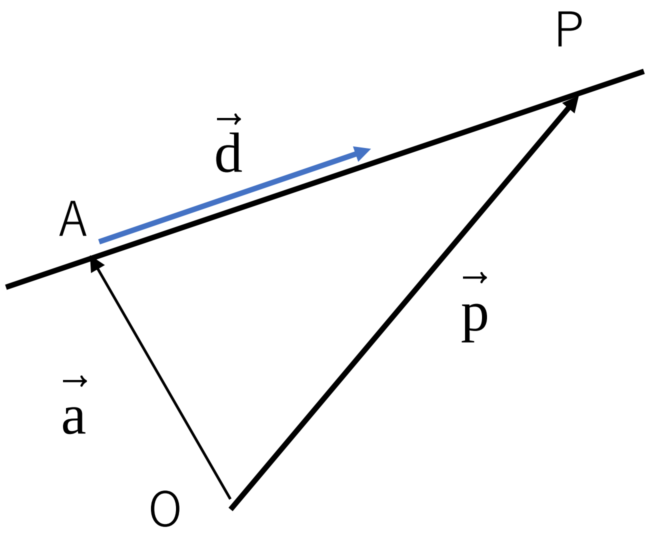


$$y=-\frac{5}{4}x+1,\quad y=-\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}$$

$$\boxed{\left(\frac{8}{13},\frac{3}{13}\right)}$$

直線の決定条件 1

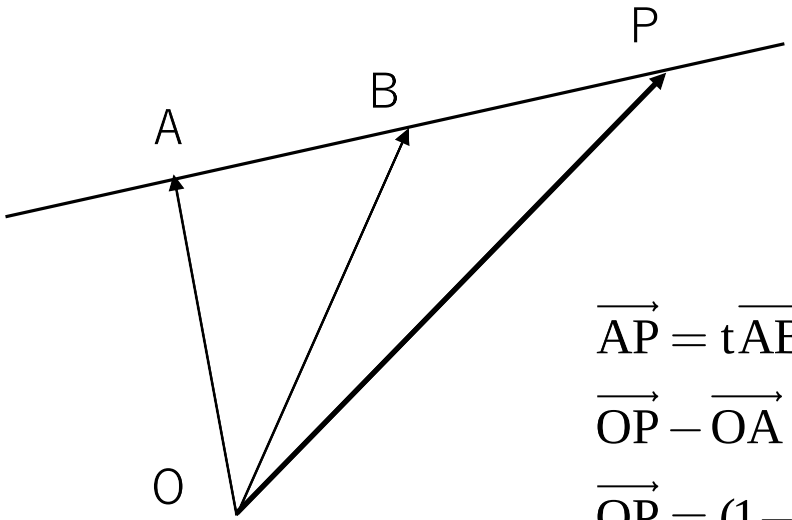
・通る点と方向ベクトル（傾き）をもつ直線のベクトル表現



$$\boxed{\vec{p} = \vec{a} + t\,\vec{d}, \quad (t \in R)}$$

直線の決定条件 2

・点A, Bを通る直線のベクトル表現



$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad (s+t=1)}$$

第5節　直線のベクトル方程式 pp.98-101

2次元R^2での直線の方程式 p.99

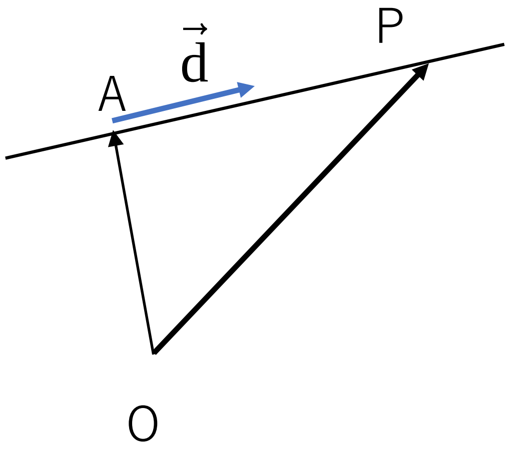
例８：点A（４，３）を通り，方向ベクトル：$\vec{d}=(1,2)$

である直線の表現を求めなさい.

$$\vec{p}=\vec{a}+t\,\vec{d}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+t\\3+2t\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x=4+t\\y=3+2t\end{cases}$$

$$x-4=\frac{y-3}{2},\quad y=2x-5.$$



ベクトルは次元に関係ない表現

3次元R^3での直線の方程式 p.100

例９：点A（1，-1, 2）を通り，方向ベクトル：$\vec{d}=(2,5,-3)$

である直線の表現を求めなさい.

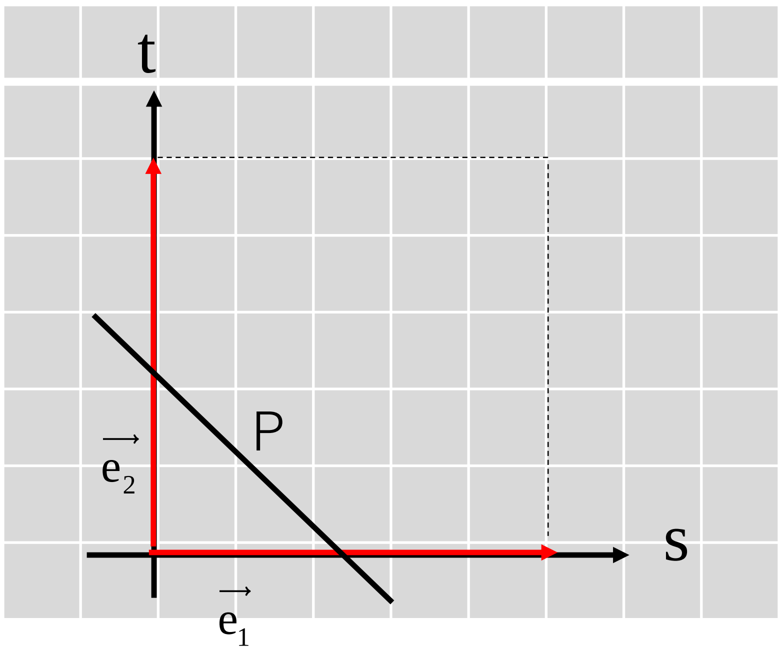
$$\vec{p}=\vec{a}+t\,\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2t\\-1+5t\\2-3t\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+5t\\z=2-3t\end{cases}$$

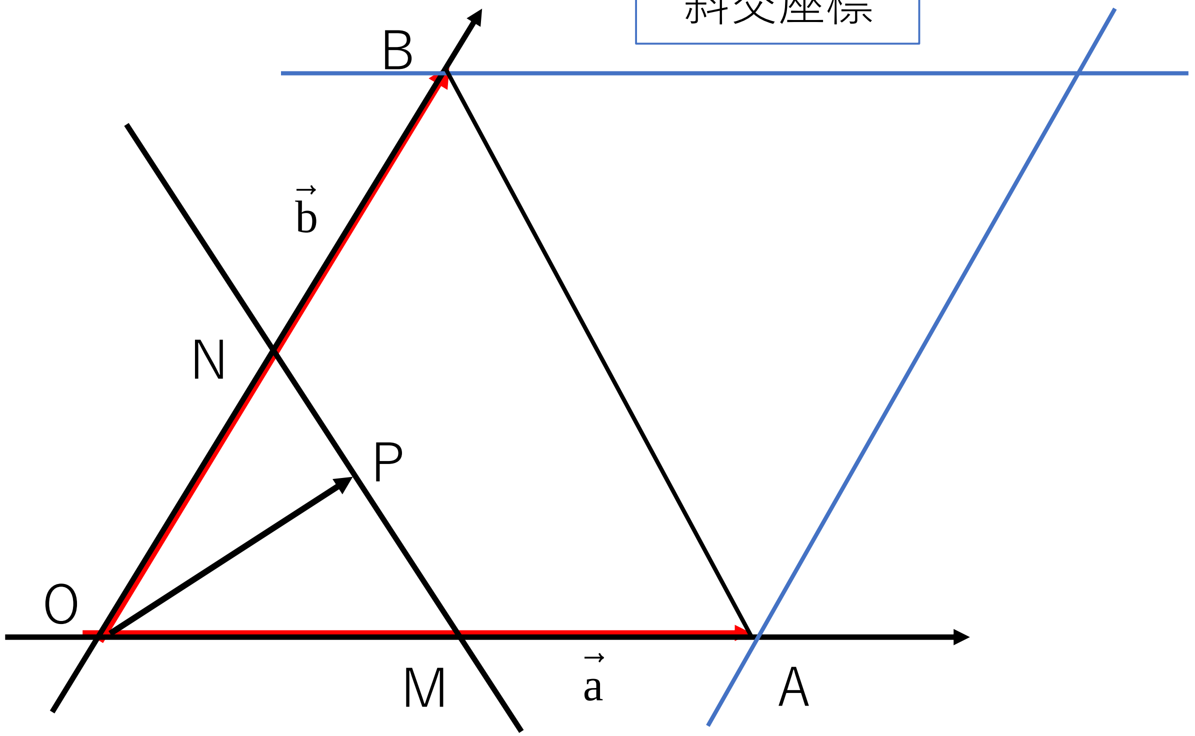
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{-3}.$$

三角形ＯＡＢにおいてをベクトル $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする．点Ｐの位置ベクトルを $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ と表され実数s, t が次の条件を満たすとき，点Ｐの存在範囲を求めなさい。

直交座標: $s+t=\frac{1}{2}$



斜交座標



$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ $\boxed{(s+t=\frac{1}{2})}$

∴　点Ｐは直線ＭＮ上

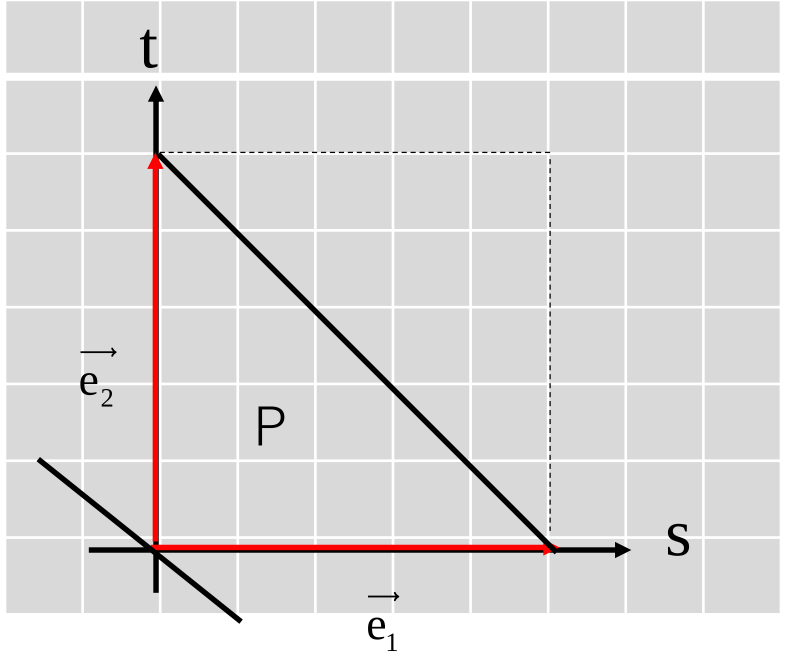
$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ $\boxed{(s+t=\frac{1}{2}, s\geq 0, t\geq 0)}$

∴　点Ｐは線分ＭＮ上

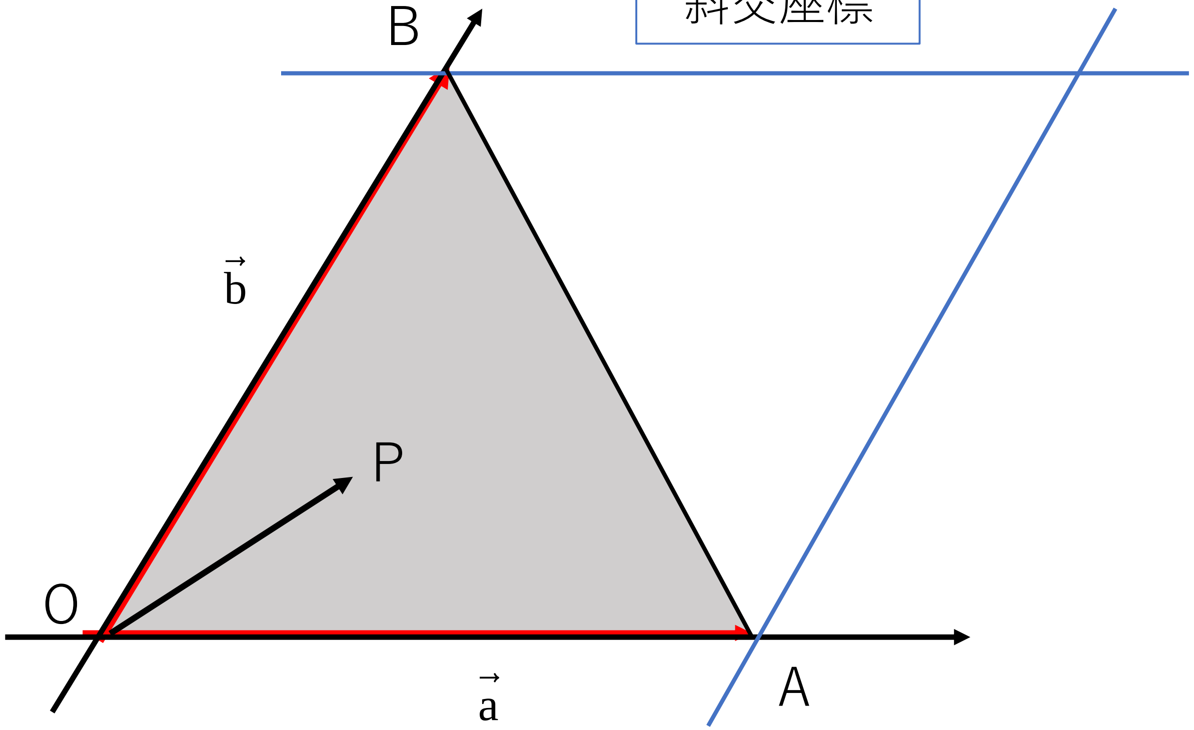
三角形ＯＡＢにおいてをベクトル $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする．点Ｐの位置ベクトルを $\vec{\mathbf{p}}=\mathbf{s}\vec{\mathbf{a}}+\mathbf{t}\vec{\mathbf{b}}$
と表され実数s, t が次の条件を満たすとき，点Ｐの存在範囲を求めなさい。

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$　　$0 \leq s+t \leq 1, s \geq 0, t \geq 0)$

直交座標:　$s+t=\frac{1}{2}$



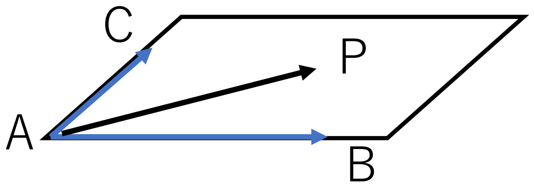
斜交座標



∴　点Ｐは三角形ＯＡＢの周上および内部

R2上での任意のベクトルは1次独立な二つのベクトルを用いて次のように表現できる（復習）．

$$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\quad(s\in R,\ t\in R)$$



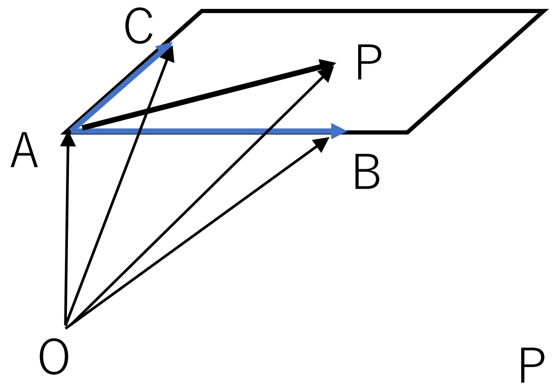
ベクトルのスゴイところは，同じ式でも３次元空間Ｒ３でも言える．3点Ａ，Ｂ，Ｃは同一直線上にはないとする．

$$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\quad(s\in R,\ t\in R)$$

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$$

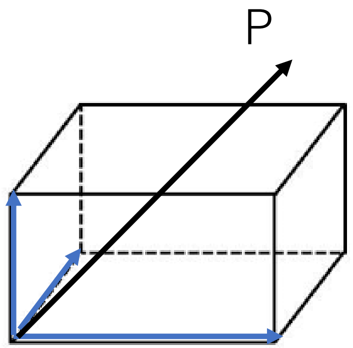
$$\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$$

$$=r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}\quad(r+s+t=1)$$



R3上での任意のベクトルは1次独立な三つのベクトルを用いて次のように表現できる（復習）．

$$\vec{p}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\quad(s\in R,\ t\in R,u\in R)$$



第５節　平面の表し方（R², R³）（例題10）p.104

直方体OABC－DEFGにおいてFGの中点M，直線OMと平面ACDとの交点をPとする，このときベクトル $\overrightarrow{OP}$ を

ベクトル $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}, \overrightarrow{OD}=\vec{d}$ を用いて表しなさい。

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OF}}{2}=\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}+\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$$

一方，点O，P，Mは一直線上より，次のような実数kが存在する．

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OM}=\frac{k}{2}\vec{a}+k\vec{c}+k\vec{d}$$

点Pは平面ACD上なので

$$\frac{k}{2}+k+k=1$$

$$k=\frac{2}{5}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OP}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{c}+\frac{2}{5}\vec{d}}$$