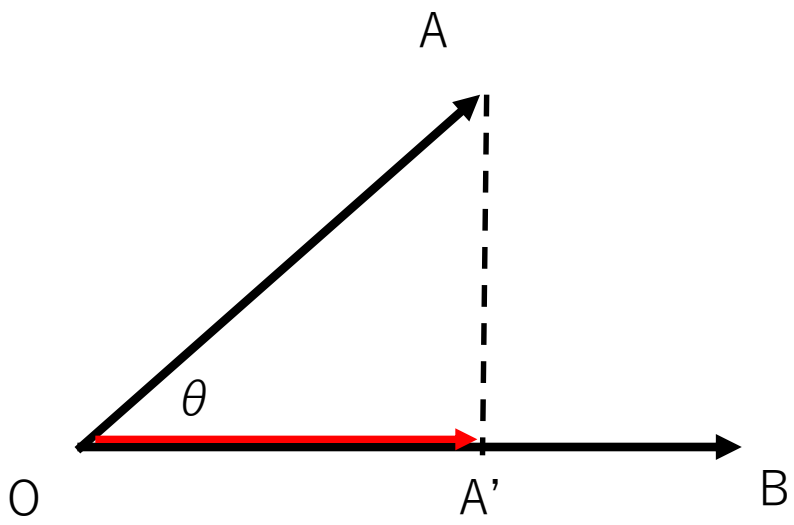
第６節　ベクトルの積（内積の定義）p.105

ベクトルの積はどのように定義するか



$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta$　←この定義を内積という

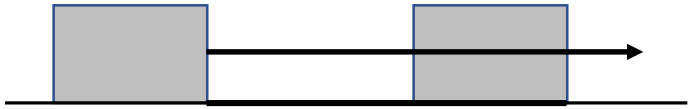
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA'}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|$　　$\overrightarrow{OA'}$　を正射影という

物理での仕事

仕事 W (J)はF(N) と物体の移動距離 s(m) の積

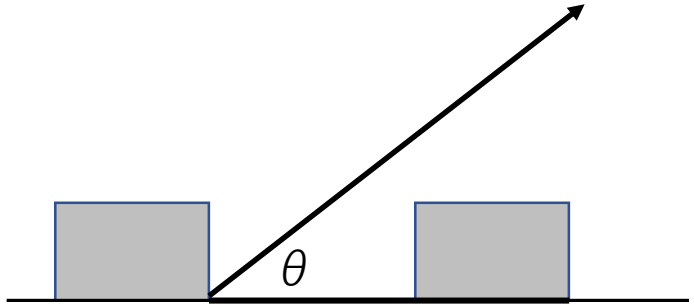
加えられる力と同じ方向に物体が運動のとき：

W＝Fs



加えられる力が運動の方向が力の向きに対して角度 ϑ をなすとき：

W=Fs cosθ



内積を使えば統一的な式で表現できる

$W=\vec{F}\cdot\vec{s}$

第 6 節　内積の計算法則 p.106

内積の計算は多項式の計算に似ている

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta=\vec{b}\cdot\vec{a}$　交換法則

$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot k(\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})\ \ k\in R$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　分配法則

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2$

例題11

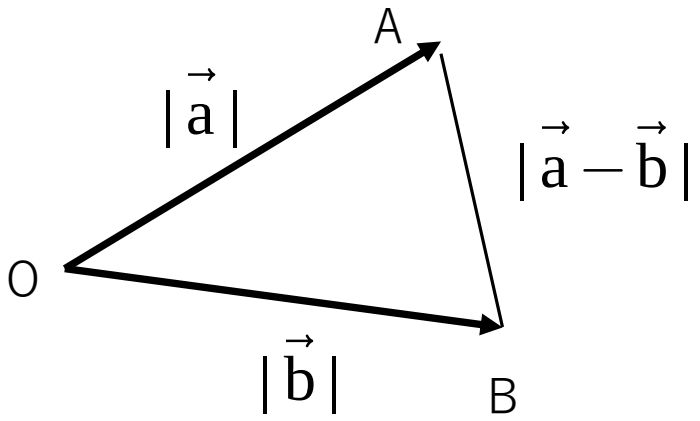
$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=1,\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ のとき

$|\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ.

方針：大きさは２乗して内積へ

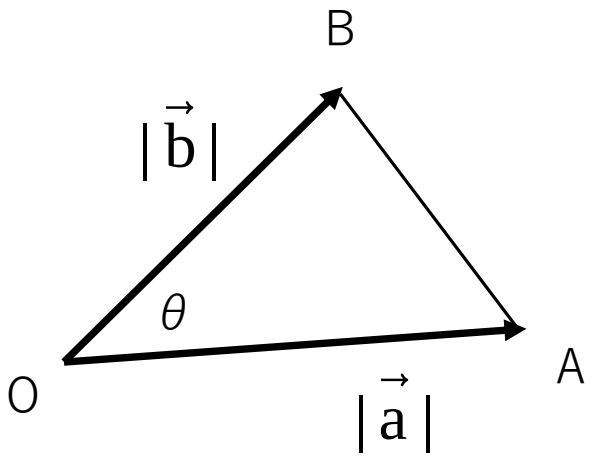
$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2$



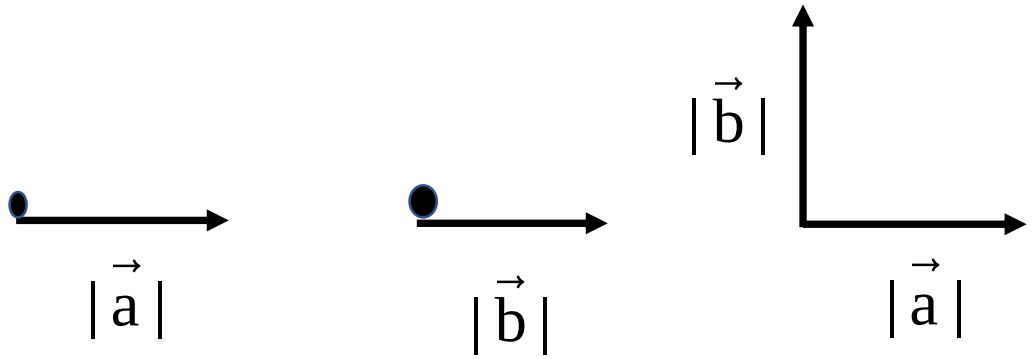
内積を用いてなす角を求める

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$$



直交条件

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}, \vec{b} = \vec{0}, \vec{a} \perp \vec{b}$$



垂直

多項式では，a b=0　⇔　a=0 or b=0

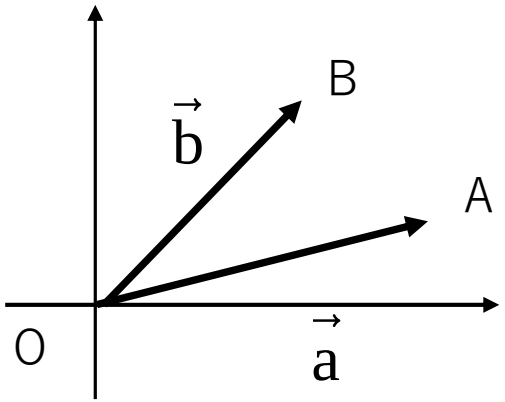
$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2$$

$$\boxed{2(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2}$$

2 次元の場合：

$\vec{a}=(a_1,a_2),\vec{b}=(b_1,b_2)$ のとき

$$2(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2$$
$$=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-(b_1-a_1)^2-(b_2-a_2)^2$$
$$=2(a_1b_1+a_2b_2)$$

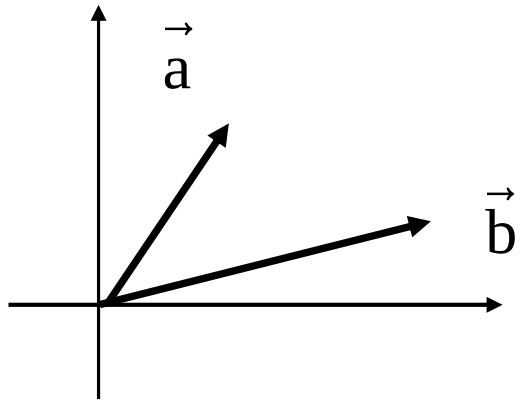


$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$$

例題13

$\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(3,1)$ のとき

二つのベクトルのなす角を求めよ.



$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

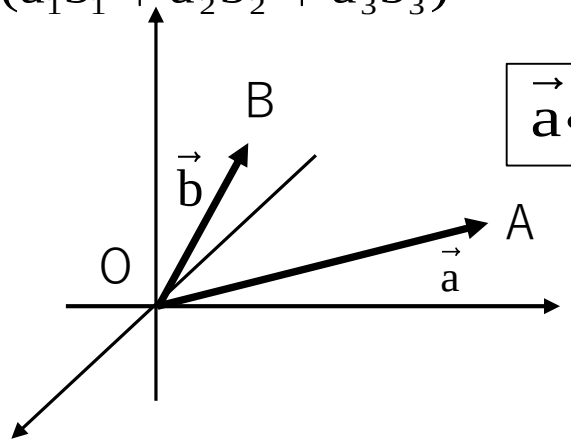
$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2$$

$$\boxed{2(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2}$$

3 次元の場合：

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$　のとき

$$2(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2$$
$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(b_1-a_1)^2-(b_2-a_2)^2-(b_3-a_3)^2$$
$$=2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$



$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

例題15

$\vec{p}=(x,y,1)$が$\vec{a}=(2,-1,2)$と$\vec{b}=(-1,2,2)$

の両方に垂直であるようにx, y の値を求めよ.

解答　$2x-y+2=0$

$-x+2y+2=0$

$(x,y)=(-2,-2)$

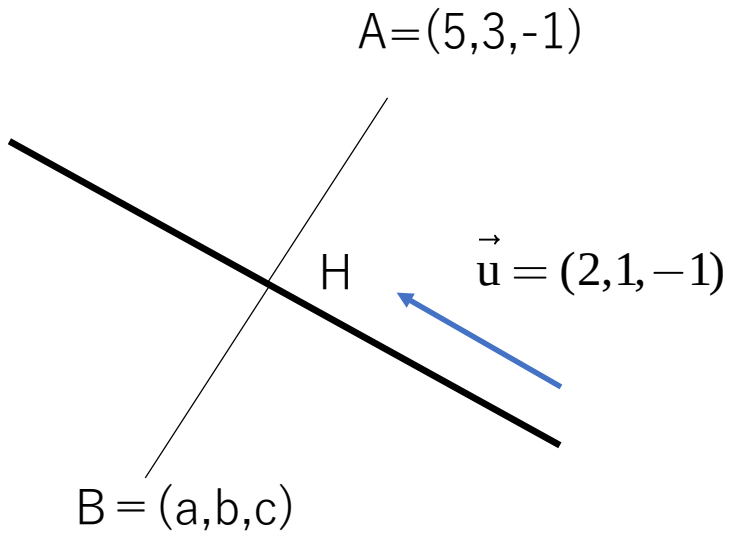
第 6 節　空間ベクトルの成分と内積（例題16）p.112

例題16：点A（5，3, -1）と直線 ℓ に対して,

(1) 点Aから直線 ℓ に下した垂線の足Hの座標を求めよ.

(2) 直線 ℓ に関して点Aと対称な点Bの座標を求めよ.

$$\ell : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t+1 \\ -t+3 \end{pmatrix}$$



解：

$\mathrm{H} = (2t-1, t+1, -t+3)$　なので

$\vec{u} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AH}} = 0,$

$(2,1,-1) \bullet (2t-6,\ t-2,\ -t+4) = 0.$

$t = 3$　　$\therefore \mathrm{H} = (5,4,0)$

$\mathrm{B} = (a,b,c)$　おくと

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AH}},$

$(a-5, b-3, c+1) = 2(0,1,1)$

$\therefore \mathrm{B} = (5,5,1)$