
* 論 説 *

教職課程「解析」へのアプローチ

東洋大学 工学部 佐藤 章
早稲田大学高等学院 武沢 護
元目黒区立第四中学校 渡辺暁生

まえがき

昨年、「教職課程「解析」の授業をどう進めるか」¹⁾についての試案をまとめた。その中で教職課程の授業の進め方について3つの問題点を指摘している。

- (a) 高校の授業から出発し、そのためには「大学でなにを学ぶ必要があるか？」を検討して大学（教職課程）における授業計画を立てる。
- (b) 数学の応用面に注目して教材を選ぶ。その土台となる高校での授業内容を意識しつつ授業計画を立てる。
- (c) 小中高の教材の内容をより厳密に見直す。

本論説は、主に(a)と(c)を発展的に考察して内容の具体化を行い、検討したものである。大きくは以下の3つの部分から構成される。

最初に「大学ではなにを学ぶ必要があるか？」の観点から、東洋大学工学部教職課程の解析学の講義に対して、科目の内容、期末試験問題と解答、授業に対する学生の感想、そして学生の教員志望動機などについて現状を分析している。この授業では、渡辺による出前授業を行っている。そこでは事前に調査したアンケート（何故、数学の教員になりたいか）をもとに、その結果を渡辺が分析し、それらを学生に報告して、さらなる感想を調べている。何人かの学生は、「お互いに教職に対する考え方が分かって良かった」とのコメントも書いてある。教職課程の授業自体の「クラス」構成も一つの研究課題となる可能性も考えられる。これらを「東洋大学工学部教職課程解析学の状況」としてまとめた。

上記の(a)を検討するにあたっては、「高校大学の間にある入学試験」、「高校教育の多様化」、「様々な入学試験」、「新カリキュラムの実施に伴う混乱」など多くの問題を考慮する必要がある。例えば、「高校の微積分」、「大学の微積分」を別個に議論するのではなく、高校から大学までを一つの流れとして捉えるという観点からの検討が考えられる。新しい試みとして、高校と大学の連携を意識したコンピュータによる授業も考えられる。これに対する提案として「コンピュータ利用を前提とした高校大学連携の視点をもった解析学（積分の導入にあたっての実験的アプローチ）」を提案した。

これについては2004年度の論説で「…高等学校での数学の授業を展開するにあたって、もちろん論理展開を厳密に行い、形式を整えた形で事柄の説明を行うことは重要であるが、値を実験的に求めたり、その題材の発展性を方向づけることで、生徒の学習意欲は高まる。このようなとき、コンピュータを用いた数式処理ソフトウェアは非常に効果的である。… …数学的事実のうち、論理で追いきいものや手計算が困難なものについて、Mathematicaの助けを借りようというものである。生徒にとっては、いろいろ実験的に数学の学習を行うことで、発見的な学習態度を身につけることができる。」と述べたことを継承したつもりである。また、(c)に関しては「教職課程における分数」をとりあげた。分数には、定義も含めて種々の知識が教師に要求される。「分数」を選んだのは、

- ・小中高で扱う「数」の大部分を占める「有理数」は分数の形で定義（後述）される。そういう意味でも、数学の授業を進めていく上で「分数」が土台としての重要性を持っているといえる。
- ・その「分数」は「数学の授業」で、あるいは「日常生活」でのあつかい方は多様である（後述）。ところが教科書、および学習指導要領では必ずしも総合的、統一的に取り上げられていないように思われる。

からである。

1 東洋大学工学部教職課程解析学の状況

1-1 学生の学習環境

東洋大学の工学部で、中学や高校の数学教員になりたいという学生の大半は、これまでに習った中学や高校の教員からの影響が強いことが調査（1-6 参照）によって浮き彫りにされている。自分は数学が得意であるからという学生もいるが、大部分は数学の教師の影響である。

教職の科目は、工学部専門科目群が優先して時間割が組まれているために、入学早々から教職の科目を意識しないと卒業までに単位の取得ができない状況にある。一方、そのほとんどが5限目（16:30-18:00）と土曜日におかれている。したがって、よほどの覚悟がないと履修を全うすることができない状況におかれている。

1-2 これまでに履修した科目（数学の科目）の内容

工学部の学生全体に共通した数学の科目は微分積分学 A、微分積分学 B、微分積分学 C と3科目があり、これらはすべて1年生の必修科目となっている。これらには、現在『微分積分学序論』²⁾ が用いられ、微分積分学 A では「極限と連続、微分法、微分法の応用」、微分積分学 B では「不定積分、簡単な微分方程式、定積分」、微分積分学 C では「偏微分法、2重積分」について学習することになっている。1冊の教科書が3科目に分割され、学習することになっている。

この他に、微分方程式やその他の科目が自由に選択できるようになっている。

1-3 教職での数学の科目

教職の数学科目には、代数学 I、II、幾何学 I、II、解析学 I、II の計6科目が設定され、必修科目になっている。上述した工学部共通の数学を意識したわけではないが、現在、以下のような内容の解析学 I、II を教えている。教科書は用いずに、寄せ集めの教材を使っている。

① 解析学 I の授業内容

これまで公式や定理は既知のものとして学習してきた学生に対して、公式、定義や定理などの証明をまじえて、解析学が展望できるような授業を心掛けた。したがって、微分／積分の歴史的な経過から（『数学序説』³⁾）、最終的には極限の取り扱いや実数の定義（『解析概論』⁴⁾）などが理解できるような授業方法である。ただし、『解析概論』はこのような本（実数の定義）もある、という程度に紹介のみしている。そのため、微分／積分の細部にわたる項目や演習は省略している。また、工学部共通の『微分積分学序論』では、第一章に「極限と連続」があり、これらを先に説明（定義）しているが、ここでは最後にそれを説明する方法をとっている。主な項目を列挙すると以下ようになる。

「解析学の成り立ち、接線とは、微分の意味と応用、積分の意味と応用、微分積分の基礎定理、極限の概念と定義、実数の概念と定義」

② 解析学 II の授業内容

解析学は一般に、微積分から始まり、微分方程式の解法までが含まれるといわれている（『数学入門』⁵⁾）。解析学 II では、常数係数の線形微分方程式を対象にして、その意味と解法について理解させることを心掛けた。

ここでは、2階微分方程式までに限定し、微分演算子を導入することによって、2次方程式（特性方程式）を扱えば、簡単に解けることを示している。n 階までの一般論を説明したところ、理解できない学生が多かったので、2階までに限定した。2次方程式の解法では、負の数、複素数などの概念、また、微分方程式の解法では、無限級数などとの関係を示すことによって、各種関数相互関連の理解が総合的にできるような授業内容をとっている。主なものは以下のとおりである。

「微分方程式の意味と位置づけ、常数係数微分方程式の意味と解法、微分演算子と微分演算式の導入およびそれによる解法、無限級数の導入と各種関数との相互関係」

1-4 期末試験問題と解答状況

通常、数学の試験では、計算問題を解くことが中心になるが、今年度は授業の趣旨が反映できるように以下のような問題を考えてみた。内容的には常識的な基本問題である。

① 試験問題

[問題1] $f(x)$ が区間 $a \leq x \leq b$ において微分可能であるとき、その導関数は

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で表される。この定義を用いて $f(x) = x^2$ の導関数を求めよ。

[問題2] 区間 $a \leq x \leq b$ において、 $u = u(x)$ 、 $v = v(x)$ が微分可能であれば、

$$(uv)' = uv' + u'v \quad (1)$$

が成立する。これを証明せよ。ただし、 $u = u(x)$ 、 $v = v(x)$ が微分可能とは

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

を意味する。

[問題3] 上記(1)式 $(uv)' = uv' + u'v$ を用いて、

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x$$

であることを示せ。

[問題4] $f(x)$ が区間 $a \leq x \leq b$ において連続かつ単調増加であるとする。 $f(x)$ の定積分は以下のように求めることができる。

いま、 $a \leq x \leq b$ を n ($n = 1, 2, 3, \dots$) 等分すると

$$a = x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n+1} = b$$

これに対して、

$$s_n = f(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_n)(x_{n+1} - x_n) \quad (2)$$

$$S_n = f(x_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_{n+1})(x_{n+1} - x_n) \quad (3)$$

とすれば、

$$s_n \leq \int_a^b f(x) dx \leq S_n \quad (4)$$

が成立する。ここで、 $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad (5)$$

となる。

(i) $f(x) = x$ とするとき、(2)、(3)式を用いて s_1, S_1 ($n=1$ の時の値) を求めよ。

(ii) 上記の定積分を用いて $\int_0^1 x dx$ ($a=0, b=1$ のとき) を求めよ。

[注：下記に述べるように $\int_0^1 x dx$ の代わりに $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ (もしくは $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$) と書くべきであったかも知れない

— 設問の仕方が悪かったか]

[問題5] 授業に対する感想 (何でも良い) を述べよ。

② 試験の解答状況（ただし、学生数は25名の少人数である）

正解率は [問題 1] 72%, [問題 2] 52%, [問題 3] 72%, [問題 4]-1)88%, [問題 4]-2)16%

[問題 1] は微分の公式の意味を知って、具体的に計算してみることを狙ったつもりである。

[問題 2] は証明問題であり、微分の構造も狙ったつもりである。やはり証明問題が不得手である。

[問題 3] はほとんどができていますが、正確に解いている学生は少ない。おまけをしている。一旦、 $u(x) = x$, $v(x) = x$ とおくことがなされていない学生が多数であった。定理の使い方が未熟（不慣れ）であると考えられる。

[問題 4]は積分の求積法（Rieman 和と似ているが正確には異なる）に関する問題である。Rieman 和については、前述した『微分積分学序論』の中の積分で習っているはずである。

[問題 4]-1)は念入りに説明したので、理解されたような気がする、ただし、[問題 4]-2)の設問が悪かったために、不定積分の公式（ $\int x dx = \frac{x^2}{2}$ ）を用いて定積分を求めてしまっている。何のために、長々と説明したか理解してもらえていなかった。残念である。

1-5 授業に対する感想（[問題 5]より）

① 感想文の抜粋（A, B… などは個人の識別記号である）

A：この授業では、微分／積分の根本的な部分、証明を勉強した。私は、これまでは微分／積分の公式だけを覚えて、根本的な部分は考えずに問題を解いてきた。しかし、教職科目を取るにあたって、いかに根本的な部分を証明できることが重要だということを知りました。また、渡辺先生の授業により皆がどのような考えで教師になろうとしているかが分かりました。私もしっかりした考えをもって教師を目指したいと思います。

B：一番印象に残ったのは、先生の友人（渡辺暁生）が自分たちに「どんなことが必要か」など先生になるために必要なことを話してくれたことです。また、皆がどんな先生に会ってどんな先生が目標になっているかを聞くことができたことです（これはアンケート結果から渡辺暁生が分析した）。

C：微分／積分の歴史から、意味や仕組みを細かく見てきたが、これらを考えだした数学者は本当にすごいと思う。将来、中学の教師になったときには、根本から数学が分かってもらえるように、もっと学んでいきたい。

D：高校時代に公式として覚えてきたものの原理を学びました。こういうことを学ぶことによって理解が深まりました。

E：微分も積分も普段使っている公式を証明できただけで、簡単に計算できるようになった。

F：この授業は他の教職の授業と違ったものでした。特に、渡辺先生の授業ではいかにして子供たちをひきつけられるかを考えて授業を組み立てていく必要があるかを改めて気づきました。教師になるには、パソコンを利用できるなど、多くのスキルが必要なことがわかりました。

G：微積の問題を解くのではなく、中身を知る授業であった。普通、定理や公式ばかり話していれば退屈になってしまうが、これからの子供にはその中身から教えていかななくてはならないような授業でした。

H：この授業は定義など数学の原点から教えてくれるので楽しかったです。

I：この授業は丁寧で分かりやすかったけれども求積法はちょっと難しかったです。

J：この授業はただ黒板を写すだけでなく、自分で考えなければならない授業だったので、とても面白かったです。高校では、微分積分が分からなかったのも、一から新しいことを学びました。

K：勉強してみて沢山の迷いができました。それは今まで暗記ばかりして覚えていたからだと思います。もっともっと奥の奥まで理解しなければならぬと思いました。説明はやっぱり数字を使ってやった方が理解しやすかった。

L：高校や大学で習った微分／積分を違った見方で学ぶことができました。そのせいか難しかったです。教師になるためにはきちんと定義などを学ばなければならぬと思いました。授業を通じてはじめて聴くような定理を学べてよかったです。中学の教師だった方の話もとてもためになりました。

M：数学の根底のような話が聞けて面白かったです。

N：工学部のカリキュラムにはない部分について勉強できたと思う。

② 感想文のまとめ

これらの感想から、

- 1) 数学を暗記科目として考えていたが、この授業をとおして、数学を解くことだけでなく、定義や定理が何であるのか、という根本的なことを理解できた。
- 2) 授業は単調に公式、定義や定理を鵜呑みにして、問題を解くことだけではなく、その本質を理解させるためには種々の方法を身につけておくことが必要である。
- 3) 一方、文字による説明では理解し難いので、「数字を使って説明して欲しい」という要求もあった。はじめは何を言っているのか分からなかったが、文字に数を代入して説明して欲しいということが、後でわかった。これらは中学で習う文字、文字式の意味の理解が不十分なためである。
- 4) 現場での教師の話が聞けたことが、学生にとって一番印象に残っている。「百聞は一見にしかず」、これほど説得力のある授業はないと思われる。

などのことがわかり、上述したカリキュラムと授業方法も間違っていないのではないと思われる。ただし、授業に対する感想文を試験の解答用紙に書かせた場合には、信頼性が低いという説もある。

1-6 思い出に残る授業 (中・高)

アンケート(2005. 6)「自分の受けた授業(中学・高校の数学)を振り返ってみて何が良かったのか、具体的に書く」よりの抜粋(「見出し」、「アンダーライン」は執筆者が記入。A, B, C… は1-5と無関係)である。

「1-1」で述べたように、中学や高校の数学教員になりたいという学生の大半は、これまでに習った中学や高校の教員からの影響が強い。学生の考えを具体的に知るという意味で「1-1」を補充するものであるが、コメントを加えて授業でも発表したところ、何人かが「お互いに教職に対する考え方が分かって良かった」という感想を述べていた。教職課程の授業自体の「クラス」も一つの研究課題であろう

A 機械工学科 「私にしかできない授業」

……これは普通のやり方ですが、私がその前の高校1年生の時の数学の先生は頭のとてもよい先生と言われていましたが、その先生の教え方は生徒に問題を解かせることはほとんど無く、先生自身が解いて、どんどん前に進んでいく授業でした。私はその授業では、先生が問題を解いているから、自分はとりあえずそれを写しさえすればいいという気持ちになってしまい、結果から数学の成績が悪くなってしまいました。

私はこのような経験から数学のできる人、頭の良い人だからといって数学の教え方が上手いとはかぎらないということが分かりました。そして数学があまり得意でない私だからこそ、私にしかできない授業があるんじゃないかと思い、数学の教師になってみたいと思うようになりました。……

B 電気電子工学科 「数学が好きになった問題」

私が今まで受けてきた数学の授業の中で印象に残っているのは、中学一年生のときに受けた授業である。その頃私は数学が好きでも、得意でもなかった。むしろ苦手意識を持っていたくらいだった。その先生がやった授業というのは、数学に関係している問題なのだが、よく入試問題に出題されるような計算問題や証明問題ではなく頭をやわらかくして解くような問題だった。例えば、「正六角形に線を三本つけ足して正方形を六個つくる」といったような問題だった。このような問題には、数学ができるできないは関係ないので積極的に参加することができた。この授業を受けて私の数学への意識がかわり、取り組む姿勢も変わった。するとおのずと数学が好きになり得意になっていった。……

C 環境建設学科 「公式」

私が最も心に残っている数学の授業は、小学校5、6年の時私の担任だった先生の授業です。もともと小1の頃から算数は好きでした。小3になった頃から友達は塾に通い始めましたが私は、通わずに学校の授業だけで学んでいました。小5のある日の算数の授業中「三角形の面積を求めなさい」という問題を出され、私は考えていました。すると何人かの友達はすらすら解いていました。私は公式を知らなかったのですぐ解けなかつ

たのです。先生は公式によって解いた友達に「この式はどうやって作ったの？」と質問しました。返事は「公式です」というものでした。先生はいきなり怒り出しました。「公式がなんでそういう公式なのか分からなければ本当に問題が解けたという事にはならない！！」といいました。その言葉が忘れられず、公式が出てくる度、なんでこの公式になったのだろう？と考えるようになりました。丸暗記より忘れにくいし、楽しいし、先生の言葉には感謝しています。その先生の授業は算数以外にも、体育、社会など… とても心に残っているものばかりです。私の憧れの先生で、教師になる！！という気持ちをより強いものにしてくれた人です。

D 環境建設学科 「生徒の感覚、生徒の気持ち」

私が今までに受けてきた授業の中で良かったと思う点を挙げるとたくさんある。その中のいくつかを紹介していこうと思う。まず一つ目としては数学的な考え方を身近な物事と結びつけ、それを元にして展開させて授業を広げていく授業スタイルの授業である。中学校ぐらいになると数学などは数字が並んでいるだけ意味のとりにくいグラフや図形などがある。しかし身近な生活に近づけて話をすると生徒側にとっては意味がとりやすくなり興味もわいてくる授業へと変化する。私も何度か先生のその行動によって興味のない数学の問題、理科の問題に引きつけられたことがある。これはこれから私たちが授業をしていく上でもとてもよく役に立つ教え方だと言えることができるだろう。

二つ目に挙げられることとしては生徒を積極的に授業に参加できるようにすることである。例として挙げられることとしては、実験などを行う化学実験などである。写真ではなく自分の目で見て自分の手でさわり行うことが記憶へとつながり無理矢理覚えるよりも効率的で覚えやすかったと思う。親身になって話を聞いてくれて熱心にわかりやすい授業をしようとしている先生の授業も聞こうという努力をしようと思わせてくれてすごく好きだったことを覚えている。授業指導要綱に合わせてたんたんとしている授業はあまり関心が持てず頭に残らない授業が多かった。……

E 情報工学科 「文系、理系」

……2年になると、理系・文系でクラスが分かれた。理系クラスは数学Ⅱ・B・Ⅲ・C、文系クラスは数学Ⅱまでという感じである。この時期になると、予習・復習をしている人と、していない人で大きな差が出てくる。予習・復習をしていない人は授業にもついていけないし、それ自体がつまらなくなってしまう。そうして最初は半分くらいに分かれた理系・文系クラスが、文系クラスに片寄りがちになってしまうのである。理系のことをやりたかったけど数学が難しいからあきらめて文系に変える、という人も最近では少なくない。そういった生徒の相談にも、教師はもっと対応すべきではないかと思う。

F 情報工学科 「問題を解くだけではない」

……中学に入学したばかりのころ、自分は数学を嫌いな科目の1つとしていた。その理由が、数学というのは「問題」を解く教科としか思えなかったのである。……

偶然たるきっかけで数学が好きになった。どこがよかったのか。先に挙げた「問題」を解く教科ではないと証明してくれたことである。授業では、常に「考えること」「視覚的に」「世の中の現象」を自然な形で示してくれたことが大きかったと思う。空間図形ならば、発泡スチロールを授業中で持ってきて切ってみるというような実験的な授業、論理的なこと(定義など)は、それらをきちんと説明というように、本質を大切に授業してくれたことがよかったことだと思う。そういうことによって、ただ単に問題を解くものではないということがわかったと思う。

1-7 まとめ

今回は東洋大学の工学部学生の現状を紹介した。解析学Ⅰ、解析学Ⅱは教職科目の必修であり、これを履修できないと免許が採れない仕組みになっている。「何を」、「どのように」教えたら良いのか、を考えるにあたって、参考までにカリキュラムのおおよそ、試験内容、結果、感想をも含めて紹介した。もちろん、解析学Ⅰ、解析学Ⅱの教科内容はいまだ自信がなく模索中である。それを究明する手掛かりの一つになればと思い、私の経験をまとめてみた。

これまでに教えてきて感じたことを以下にまとめてみた。

- 1) 数学は暗記科目だったという学生が大部分であるという印象が強い。公式を覚えてそれを駆使して問題を解く、腕力を磨くにはもってこいであるが、数学のもつ論理性、構造の理解が不足していると思われる。これは受験社会の必然性かも知れない。
- 2) 数の概念が明確になっていない。マイナスとマイナスを掛けると何故プラスになるか、を質問してみた。その場で答えられた学生はいなかったが、この質問が出されたことがとても新鮮で魅力ある授業だった、という感想をもった学生がいた。自然数から実数までは既存の事実（知識）として教えられてきている。
- 3) 私の教えている解析学 I、解析学 II のカリキュラムは、上記（1）を補うものになるかと思われるが、通常の解析学のレベル（内容）をはるかに下回っているかも知れない。これは苦肉の策として考えたものである。
- 4) 数年ほど前から、解析学 I では渡辺暁生に、解析学 II では武沢 護に、それぞれ一回ずつ授業をしていただいている。大変に好評で、学生側からは新鮮であり、充実した一時間になっていることが感想文（「論説」早稲田大学数学教育学会、21 巻第 1 号）から理解できる。

2 コンピュータ利用を前提とした高校大学連携の視点をもった解析学

—積分の導入にあたっての実験的アプローチ—

2006 年から新指導要領で学習した高校生が大学に入学してくる。高校数学の学習でいうと、従来の学習指導要領の時とは大分異なる生徒が大学に入ってくる。コンピュータ・情報教育関係でいうと「情報」が必修になったため、高校数学でのコンピュータの扱いも大きく変わった。特に、数値計算関連の新指導要領での扱いは、旧課程は数学 C の中に「数値計算」として台形公式、シンプソンの公式程度まで扱っていたが、現課程では数学 B の中に「数値計算とコンピュータ」として台形公式程度の扱いになり、数学の面からみると却って内容の取り扱いが易しくなった。このようなことを背景に、ここでは高校大学連携の視点を持った高等学校での積分導入に関する授業案を提案する。

高等学校において積分の導入（数学 II）は微分の逆演算として定義するようになってから久しい。すなわち、

$$F'(x) = f(x)$$

をみたと $F(x)$ を $f(x)$ の不定積分と定義する。すなわち積分が微分に從属しているのである。かつては積分は定積分を区分求積法で求めて原始関数につなげたが、今はほとんどの教科書は逆微分で積分を定義する。この理由はいろいろあるようだが、その一つに「区分求積法が無限級数の考えを使うので高等学校数学の導入として難しい」という側面がある。しかし、微分と積分では歴史が違う。また、原始関数の存在は一般になんともいえない。そして何より最近ではコンピュータによる数学のアプローチが可能である。ここではコンピュータを活用しながら区分求積法を復活させ、積分を導入していく教授方法を提案する。この方法が数学本来の正統的なアプローチである。

2-1 実験的アプローチ授業案

この授業の前提として、生徒個人がコンピュータを操作できる環境を想定する。

①コンピュータによる定積分の導入

リーマン和による定積分の導入を行う。これは計算上の問題はあがあるが概念的に理解しやすいアプローチである。

②原始関数の構成

積分を逆微分で定義することは原始関数の存在を前提にしており、理論的に難点がある。ここでは数値計算の手法で原始関数を構成するアプローチを試みる。

③定積分の数値計算

リーマン和は概念的には理解しやすいが、数値計算としては誤差が大きく実用的ではない。ここでは台形公式とシンプソンの公式とで数値計算の誤差を評価しながら定積分を計算する。

2-1-1 コンピュータによる定積分の導入 (実験的アプローチ)

①リーマン和による定義とその比較

いま、簡単のために連続関数に対して、閉区間 I での定積分を考える。この閉区間 I を n 等分する。

$$\frac{b-a}{n} = \Delta$$

とおき、次のような和を考える。

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta \quad (f(t_i) \text{ は代表点})$$

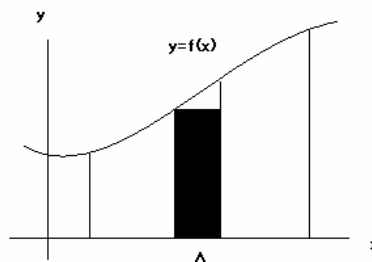


図1

この n を ∞ にした時の極限を考えることで面積が求まりそうである。実はこの和を (右側) リーマン和と呼ぶ。このリーマン和では、代表点のとり方はいろいろあり、

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \Delta \quad (\text{左側リーマン和})$$

$$\sum_{i=1}^n f\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) \Delta \quad (\text{中点リーマン和})$$

などのとり方があるが、こうしたリーマン和の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta$ が存在するならば、その値を $\int_a^b f(x) dx$

とかき、関数 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ での定積分と定義する。

② Mathematica によるリーマン和の定義

①での各リーマン和を Mathematica を用いて実際に数値計算する。今まではこのような計算を筆算で行うことはまず不可能であった。次に述べるコマンドは Mathematica 特有のものである。簡単のため関数 $f(x) = x^2$ を例とする。

$$\bullet \text{ 右リーマン和: } \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n}$$

$$\text{riemannright}[f_D@8a_ , b_ , n_ D := \sum_{i=1}^n f[a + i * Hb - aL \cdot nD * Hb - aL \cdot n];$$

$$\bullet \text{ 左リーマン和: } \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n}$$

$$\text{riemannleft}[f_D@8a_ , b_ , n_ D := \sum_{i=0}^{n-1} f[a + i * Hb - aL \cdot nD * Hb - aL \cdot n];$$

$$\bullet \text{ 中点リーマン和: } \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{2n} (2i+1)\right) \frac{b-a}{n}$$

$$\text{riemanncenter}[f_D@8a_ , b_ , n_ D := \sum_{i=0}^{n-1} f[a + Hb - aL \cdot H2 nL H2 i + 1LD * Hb - aL \cdot n];$$

③リーマン和による $f(x) = x^2$ の $[0, 2]$ の近似積分計算 (100分割で実験)

```
f[x_]:=x^2
riemannright[f][{0,2},100]//N      2.7068
riemannleft[f][{0,2},100]//N       2.6268
riemanncenter[f][{0,2},100]//N     2.6666
```

実際に積分で計算すると,

```
∫₀² x² dx // N      2.66667
```

次に, 3つのリーマン和に対して分割数を 0 から 100 までを 10 刻みで近似値がどのように推移するか表にまとめた.

```
Table[{t,riemannright[f][{0,2},t]//N,riemannleft[f][{0,2},t]//N,riemanncenter[f][{0,2},t]//N},{t,0,100,10}]/TableForm
```

分割数	右リーマン和	左リーマン和	中点リーマン和
0	0.	0.	0.
10	3.08	2.28	2.66
20	2.87	2.47	2.665
30	2.80148	2.53481	2.66593
40	2.7675	2.5675	2.66625
50	2.7472	2.5872	2.6664
60	2.7337	2.60037	2.66648
70	2.72408	2.6098	2.66653
80	2.71688	2.61688	2.66656
90	2.71128	2.62239	2.66658
100	2.7068	2.6268	2.6666

この中では, 中点リーマン和が一番良い近似となることがわかる.

2-1-2 原始関数を構成する

冒頭にも述べたが, 最近の高等学校では積分の導入は微分の逆演算として定義する. すなわち,

$$F'(x) = f(x)$$

をみたす $F(x)$ を $f(x)$ の不定積分と定義するが, これでは本当に $F(x)$ が存在するかどうか, 何かごまかされたような感じがする.

もともと, 原始関数は先の定積分を $\int_a^x f(t)dt = F(x)$ として x の関数とすることで構成される.

これを Mathematica によって原始関数の構成する.

次のコマンドは, $f(x) = x^2$ の区間 $[0, t]$ において 10000 分割の右リーマン和を計算したものを表にした.

(t は 0~1 までを 0.1 の刻み幅でプロットした)

```
Table[{t,riemannright[f][{0,t},10000]//N},{t,0,1,0.1}]/TableForm
```

```
0      0.
0.1    0.000333383
0.2    0.00266707
0.3    0.00900135
0.4    0.0213365
0.5    0.0416729
0.6    0.0720108
0.7    0.11435
0.8    0.170692
0.9    0.243036
1.     0.333383
```

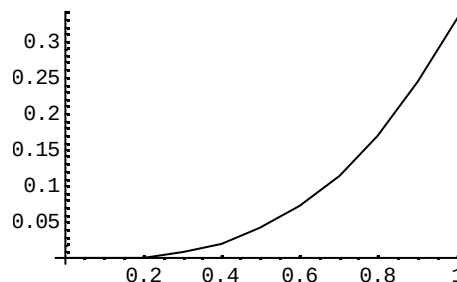
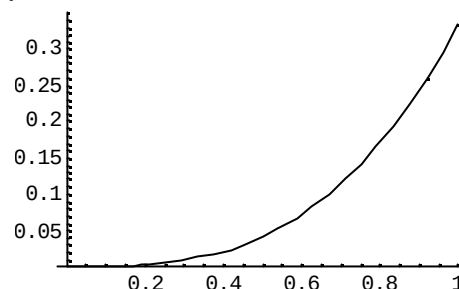


図2 aa のグラフ

この値をプロットすることで近似的に原始関数 aa が構成できる.

`aa=ListPlot[%,PlotJoined->True]` (図2)



実はよく知られるように, 関数 $f(x) = x^2$ の原始関数の一つに

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 \text{ がある.}$$

このグラフ bb を次に描く.

`bb=Plot[1/3*x^3,{x,0,1}]` (図3)

図3 bb のグラフ

aa と bb を重ねて描くとはほぼ一致することは容易に確かめられる.

こうして微分と積分が結びつくことが実感できる. そして, $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$ もしくは,

$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$ が成立する (微分積分の基本定理) が, これが高等学校の数学では定積分の定義になっている.

2-1-3 定積分の数値計算

先に述べたように, 現行の教育課程において台形公式による定積分の計算は残ったがシンプソンの公式を使った計算は扱わなくなった. 高校情報科が必修になる時代に, 高校数学においてコンピュータを活用する視点から見れば, これは大きな問題といえる. 原始関数が簡単に見つかるのであれば, 微分積分の基本定理により定積分を計算することは効率的である. しかし, 初等的な関数の原始関数さえも求まるとは限らず, このような数値的な積分法を用いて定積分を近似的に求める必要がある. ただ, 3-1-1 で扱ったように定積分の計算にリーマン和を計算することは現実的ではない. ここでは, Mathematica の数値積分 `NIntegrate` と台形公式, シンプソンの公式を用い, そして両者を比較する. 数値計算での近似値は, 複数の方式を比較検討するところに教育的な意味がある.

ここでは $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$ を例に取り上げる. Mathematica でまず台形公式を定義する.

```
trapezoid[f_][{a_,b_},n_]:=
((b-a)/(2n)*(f[a]+2Sum[f[a+(i*(b-a))/n],{i,1,n-1}]+f[b]))/N
```

次に, シンプソンの公式を定義する.

```
simpson[f_][{a_,b_},n_]:=
((b-a)*(f[a]+4Sum[f[a+(i*(b-a))/n],{i,1,n-1,2}]
+2Sum[f[a+(j*(b-a))/n],{j,2,n-2,2}]+f[b]))/(3*n)/N
```

この二つの方法による定積分に対し, 区間分割数を 2 から 20 までを 2 刻みで近似値がどのように推移するか表にまとめた.

```
Table[{t,trapezoid[g][{0,1},t],simpson[g][{0,1},t]},{t,2,20,2}]
```

```
//TableForm
```

分割数	台形公式	シンプソンの公式
2	3.1	3.13333
4	3.13118	3.14157
6	3.13696	3.14159
8	3.13899	3.14159
10	3.13993	3.14159
12	3.14044	3.14159
14	3.14074	3.14159
16	3.14094	3.14159
18	3.14108	3.14159
20	3.14118	3.14159

実際には、この定積分の値は π （円周率）になることが知られているので誤差の計算をすると、次のような表になる。

```
Table[{t, trapezoid[g][{0, 1}, t] - Pi, simpson[g][{0, 1}, t] - Pi}, {t, 2, 20, 2}]
//TableForm
```

分割数	台形公式	シンプソンの公式
2	- 0.0415927	- 0.00825932
4	- 0.0104162	- 0.0000240261
6	- 0.00462959	- 8.72654 $\times 10^{-7}$
8	- 0.00260416	- 1.51131 $\times 10^{-7}$
10	- 0.00166666	- 3.96506 $\times 10^{-8}$
12	- 0.00115741	- 1.32844 $\times 10^{-8}$
14	- 0.00085034	- 5.26914 $\times 10^{-9}$
16	- 0.000651042	- 2.36497 $\times 10^{-9}$
18	- 0.000514403	- 1.16662 $\times 10^{-9}$
20	- 0.000416667	- 6.20008 $\times 10^{-10}$

この関数の場合、シンプソンの公式では少ない分割数でも良い近似を与えることが分かる。

$\int_0^1 e^{-x^2} dx$ などは原始関数が初等的に表現できないものは無数にある訳だが、上の方法を使えば近似的に積分値を求めることができることが体験できることになる。

2-2 今後の課題（2006年問題）

以上、コンピュータを活用する視点から高等学校における微分に従属しない積分の導入を見てきた。このようなコンピュータを用いた実験的な面をもった内容を高等学校数学だけでなく、大学初年級または教職課程における数学教育にも積極的に取り上げる必要がある。そして、何よりもこのことを実践できるコンピュータ環境が整ってきた。新学習指導要領における高等学校数学の見直しに伴い 2006 年度から新しい教育課程で学んだ高校生が大学に入学してくる。大学初年級の数学（線型代数、微分積分と多変数の微積分）の見直しだけでなく、高校大学の数学を円滑につなぐための補充数学（数学Ⅳ）的なカリキュラムの必要性が求められるであろう。とりわけ、複素数平面、空間ベクトル、一次変換、微分方程式、確率分布と統計などが挙がるが、これらの対応は今後の大きな課題となる。

3 教職課程における「分数」

「実数上で考える」「複素数上で考える」などのように、問題を考える場合にどのような「数」を対象とするのかは基本事項であろう。したがって「数」についての知識は数学における基本事項であり、授業においても正確な理解が必要となる。

さらに、教職課程においては純粹に数学的な観点に加えて、現実「どのように、それが教育の場で扱われているか」、そして「どのように扱われていくべきか」という観点が必要となる。そこで、本稿では、教科書、学習指導要領などを参照しつつ「分数」について検討していく。なお、特にここで分数を選んだ理由は「まえがき」で述べた通りである。

分数に関連して本稿では「量」についての次の視点に注目したい。

（数学教室、国土社・1994年2月号など：小島 順）より

……《1》実体（モノ）の概念が先で、関係あるいは操作の概念が後、

《2》量という実体の抽象が数である。

……これらは一面的すぎる。人間が実体を認識するのは、対象への働きかけ、つまり操作を通してである。

そうだとすれば「操作が後」と機械的に分離はできないはずである。……

《3》「量に向けられる人間の活動の形式が数である」という視点が「実体（モノ）が先で、関係あるいは操作の概念が後」、「量という実体の抽象が数である」とのバランス上で重要だと思う。……（後略）

3-1 分数についての考察 (*1) ~ (*8) は 注目点, 疑問点など)

① 例えば

$\frac{3}{5}$ からは分数 $\frac{3}{5}$ そのもの以外に, 小数 0.6 あるいは 演算 $3 \div 5$ がイメージされる。

そして 0.6 には「量」という概念が容易に結びつく。

それに対し $\frac{b}{a}$ は $b \div a$ を表し (その結果も表しているのだが), 小数 0.6 のような感覚の「量」とは直接は結びつけづらい。

*1】「小数」と異なり「分数」は除法を表すこと, 分数式という使い方に発展すること等を考えていくとき, 「量」と「操作」という二つの面の把握が必要であろう。

② 分数について「学習指導要領解説 (小学校4年)」には次のように書かれている。

分数の意味は, その観点の置き方によって, 次のように様々なとらえ方ができる。 $\frac{2}{3}$ を例にすると, つぎのようである。

(1) 3等分したものの二つ分の大きさを表す。

(2) $\frac{2}{3}l$, $\frac{2}{3}m$ のように, 測定したときの量の大きさを表す。

(3) 1を3等分したものの $\left(\frac{1}{3}\right)$ を単位にした2倍の大きさを表す。

(4) AはBの $\frac{2}{3}$ というように, Bを1としたときのAの大きさの割合を表す。

(5) 整数の除法「 $2 \div 3$ 」の結果を表す。

これらは便宜上分けたところもある。指導に当たっては, いくつかの考えが同時に用いられることが多い。この学年で, はじめて分数を導入するに当たっては, 上記の (1), (2), (3) などの考え方をを用いる。

(4) や (5) については, 第5学年以降で取り扱う。

*2】「…大きさを表す」と明示した (1) ~ (3) と (4), (5) は明らかに異なる。分析, 検討が必要であろう。

③ そして「学習指導要領解説 (小学校5年)」には

「除法の結果と分数」

二つの整数の加法, 乗法については, その計算の結果を常に整数で表すことができる。しかし, 二つの整数の除法については, その計算の結果は必ずしも整数になるとは限らない。例えば, $3 \div 4$ を計算すると 0.75 となり, 結果は整数にはならない。また, $1 \div 3 = 0.333\cdots$ の計算のように, 割り切れない場合もある。

そこで $a \div b$ (a, b は整数で b は 0 でない) の商を $\frac{a}{b}$ という分数で表すように約束して, 除法の結果をいつでも簡単に表すことができるようにする。このように約束しても, これまでに学習してきた分数の意味や表し方と矛盾することはない。

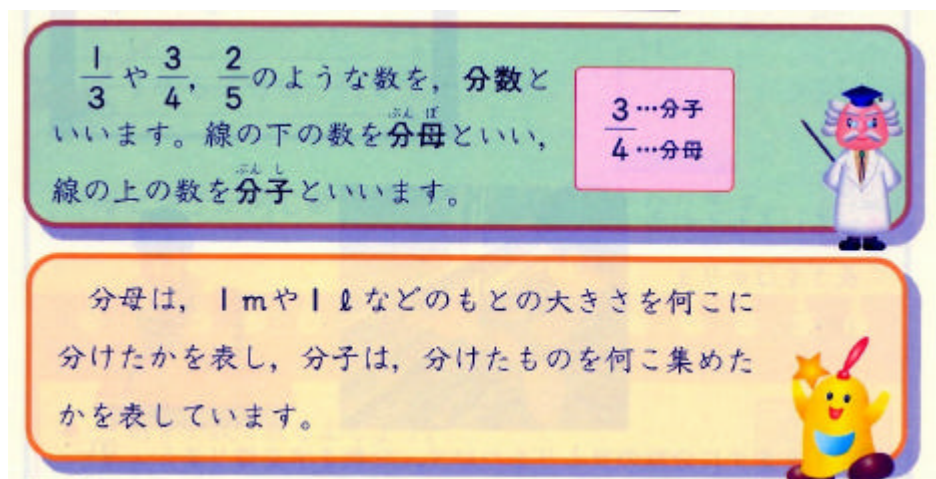
なお, このとき, $6 \div 3 = 2$ や $2 \div 4 = 0.5$ のように, 商が整数や小数で表せる場合も分数で表すことができること

に着目して, 統合的にとらえられるようにすることが大切である。また, $a \div b$ を $\frac{a}{b}$ とみたり,

$\frac{a}{b}$ を $a \div b$ とみたりすることを, 分数を小数で表したり, 分数の乗除などの計算をしたりするときに, 有効に生かすよう配慮することが大切である。

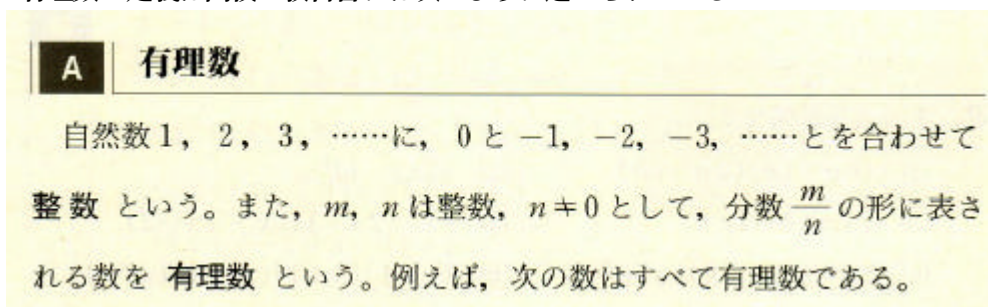
*3】除法と分数との関係を明確にし, 分数のもつ意味を示したい箇所である。

- *4] 「 a, b は整数で b は0でない」は有理数となるための条件でもある。分数の定義は小学校の教科書では下記の通りであるので、より明確な、そして見通しを持った表現が必要であろう。



(学校図書 小学校算数4年)

- *5] 有理数の定義は高校の教科書には次のように述べられている



(数研出版 数学I)

- ④ また中学校では「指導要領解説(中学校1年)」には

「文字を用いた式における乗法,除法の表し方を知ること」

文字を用いて数量や数量の関係,法則などを式に表現するとき,乗法の記号 $\times$ は,文字と文字の間や数と文字の間では普通は省略し,また,除法の記号 $\div$ は,特に必要な場合のほかは,それを用いないで分数の形で表すことを学習する。例えば $a \times b = ab$, $a \div b = \frac{a}{b}$, $a \times a = a^2$ などは,その基本的なものである。これによっていろいろな式の表現が一層簡潔になり,式の取扱いを能率的に行うことができる。なお ab や $\frac{a}{b}$ さらに $a+b$, $a-b$ という表現は操作の方法を表しているとともに,操作の結果をも表しているという見方は大切である。特に学習の初期においては,例えば, $3a+2$ や $5x-5$ のような演算記号が残ったままにしておくことに違和感をもつことがあるので十分な配慮が必要である。

- *6] 「操作の方法を表しているとともに,操作の結果をも表しているという見方は大切である。」ということは,場合によっては「問題と解答が同じ」ということにもなる。小・中学校の段階でこれをどう扱えばよいのだろうか?

- *7] $\frac{a}{b}$ は操作と結果の両方を表現しているのだろうが,例えば $\frac{3}{5}$ についても同様に解釈するのだろうか?

*8】商の表し方について中学校の教科書には次のように述べられている

商の表し方

同じノートを5冊買ったら、代金は a 円でした。
このとき、ノート1冊の値段を表す式はどうなるでしょうか。

文字の混じった除法は、次のように表す。

●商の表し方●

文字の混じった除法では、記号 $\div$ を使わずに、分数の形で書く。

例5 ① $a \div 5 = \frac{a}{5}$ ② $3x \div 4 = \frac{3x}{4}$

③ $(x+3) \div 2 = \frac{x+3}{2}$

▶注意 $a \div 5 = a \times \frac{1}{5}$ であるから、 $\frac{a}{5}$ は $\frac{1}{5}a$ と書いてもよい。また、 $\frac{3x}{4}$ を $\frac{3}{4}x$ と書いてもよい。

東京図書 新しい数学1年)

3-2 分数の日常的な使い方

下記のような「割合」としての使い方が小6の教科書に出てくるが、日常的には 「コースの $\frac{3}{4}$ を走り終わった」というように、「倍」を省略して使われる場合が多い。また「確率 $\frac{1}{5}$ 」のような使い方もある。

また $\frac{1}{2}\text{m}$ よりも 0.5m の方が多用される。

このように見ると、「分数の日常的な使い方」は多様で、必ずしも「数学を学習する上での分数の理解」を助けるとは言いきれない面も感じられる。この点はさらに検討する必要がある。

$50 \div 20 = \square$

くらべられる量 もとにする量 倍

2つの量をくらべるとき、もとにする量を1として、くらべられる量がいかに当たるかを表した数も割合といえます。割合は、倍を使って表すことがあります。

$24 \div 18 = \square$

くらべられる量 もとにする量 割合

割合を分数で表すことがあります。

(学校図書 新しい数学6年)

3-3 まとめ (*1) ~ *8】 (前出) に関連して)

① 「定義」について

小学校4年で分数が定義される (*4)) が、 $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$ のような数を分数といいます」とあるように、年齢に対応する表現としては適正であろうが、定義として「使い続ける」には不明確な要素を含んでいる。

そして高校に至るまで「定義」に関する事項は教科書ではふれないままで、分数（あるいは分数の形）は「有理数の定義」（*5）、「商の表し方」（*8）など重要な使われ方をされていく。

このようなあつかいでは「本来は関連ある事項」が別々に捉えられ、その場その場の「小間切れ学習」となり、カリキュラムとしての一貫性がそこなわれる心配がある。少なくとも小中高を通して、例えば

定義（フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』より）

分数（ぶんすう、fraction）とは、一つの**数**をある数を基準とする**比**の値として表現する、すなわちある数を別の数で割った**商**の形式で表現する、数の表現方法のひとつである。比の値であるから、同じ数を表現する分数は無限に多く存在する。

分数は、中央の**括線**（かつせん、Vinculum）と呼ばれる横棒を隔てて、上に**分子**（ぶんし、numerator）・下に**分母**（ぶんぼ、denominator）を配置することにより記述される。分母を基準として分子が占める**割合**が、その分数の示す値である。

分子・分母には、それが意味を持つ限りにおいてあらゆる数を配置することが出来る。とくに、分母・分子ともに**整数**であるような分数を**有理数**という。また、分子・分母が分数の形で与えられるような分数を**繁分数**（はんぶんすう、compound fraction）もしくは**連分数**という。

さらには、分子・分母が数式（**関数**）であるような分数を**分数式**（分数関数）といい、特に多項式の商として表される分数式を**有理式**とよぶ。分数式まで視野に入れると、何かに占める割合といった分数の意味は薄れるが、それは商（除法）の概念がそうであるのと同様である。

のような「定義」を教科書の土台として明確にし、分数のイメージを的確に把握していくことが必要ではないだろうか。

② 「操作の方法」と「操作の結果」

「 ab や $\frac{a}{b}$ さらに $a+b$ 、 $a-b$ という表現は**操作の方法を表しているとともに、操作の結果をも表しているという見方は大切である。**（中学校1年指導要領解説）」

これは分数が持っている二つの主要な面であり、小学校4年で分数を定義したときから注意して扱う必要のある重要なことからである。

しかしこれを一方的に「低学年では量的に、徐々に高学年で操作にもふれる（*2）参照）」では、例えば「操作的な面に気付いた低学年の生徒にどう答えるか」「自由な発想をどう育てるか」等が問題になってくる。

また、「操作の方法を表しているとともに、操作の結果をも表しているという見方は大切である。（*6）参照」といっても、「大切なら、どうすればよいのか？」ということになる。また「十分な配慮が必要である」の配慮の中身も問題になろう。

現状は、結果的にみて「二つの面が生徒の前に（関連無く）提示されている」といわざるを得ない。また「日常生活との結びつきの面（3-2 参照）」でも関連性は明確になってこない。

③ 除法と分数との関係

学習指導要領解説（小学校5年）には、「除法の結果と分数」について

……… $a \div b$ （ a, b は整数で b は0でない）の商を $\frac{a}{b}$ という分数で表すように約束して、除法の結果をいつでも簡単に表すことができるようにする。………

と述べられ、（*3）教科書にはこれに対応して「商を分数で表しましょう」という問題が出されている。

しかし「表すことができる」という消極的な取り上げ方であり、必要性は感じられない。

約分もこの段階では使われないし、小数÷小数への活用にもふれていない。文字式への展望も見られない。

④ 基本的視点 (②, ③に関連して)

分数の持つ有用性を理解するためには「二つの面を始めに示すこと」「なるべく早く除法と結びつけること」が必要だと思う。そして(除法も含めて)積極的に分数を使っていくことが、分数式、有理数への流れからも重要であろう。もちろん学年に応じた配慮は必要であろうが、これを基本としたい。

3-4 今後の課題

『教職課程における「分数」』がこの第3章の標題である。

学生が実際に教職に就いて授業をするとき、この章で取り上げたような観点での「分数」は教科書にもあまり書いてないし、おそらく誰も教えてはくれない。ほとんどの場合「必要性を感じた」ならば、自分自身で調査・研究しなければならない。

教職課程の授業で、この「必要性を感じる感覚」と「それを自分で解決していく方法」を獲得することは重要である。

一つの例として本稿では「分数」をとりあげたが、注目すべきテーマとして、無理数、複素数についても同様の観点での研究が必要と思われる。さらに発展させれば、関数でのあつかいも含めていくことが必要となるであろう。特に複素数に関しては「高大の連携」という点からも、取り組みが急がれる課題である。

あとがき

『教職課程「解析」の授業をどう進めるか』¹⁾についての検討内容を受けて「東洋大学工学部教職課程解析学の状況」、「コンピュータ利用を前提とした高校大学連携の視点をもった解析学(積分の導入にあたっての実験的アプローチ)」、「教職課程における分数」についてまとめた。これらは、課題に対する解答ではなく、あくまでも研究過程の一つの報告であり、かつ過程の試案である。

「解析」の授業と『教職課程「解析」』の授業とは何処が違うのだろうか。そんな疑問がきっかけになって、2年前から始めた研究である。

学生を前にしての授業であることには違いないが、後者ではそれぞれの学生の背後に「将来、彼らに数学を習う生徒たちの顔がちらつく」ともいえる。そして時には「その顔」は数学を拒否している。どうすればいいのだろうか。

もちろん「解析」の授業を通して「数学が好きになって」ほしいし「素晴らしさを感じて」ほしいのだが…特に教職課程ではこの思いが強い。将来教壇に立ったとき「とにかく先生は数学が大好きなんだ!」と生徒たちに感じさせるものを学んでいてもらいたいものである。

三人でこういう雑談を交わしながらの研究である。明快な結論が出ないのが当然かもしれない。しかし、アプローチしようとする姿勢は少しずつ見えてきたようにも思う。

本稿で検討した内容や意見は「大学における教職の数学が如何にあるべきか」の議論に対する一つのたたき台である。皆様からのご意見、ご批判、コメントがいただければ、それに越した幸せはない。

今後とも「大学における教職の数学が如何にあるべきか」の研究を続ける予定である。学会の皆様方のご指導、ご支援、ご協力をお願いする次第である。

参考文献

- (1) 佐藤 章, 武沢 護, 渡辺暁生, “教職課程「解析」の授業をどう進めるか”, 早稲田大学数学教育学会誌, Vol.22, No.1, 2004
- (2) 林ほか, 『微分積分学序論』, 学術図書出版社, 2004
- (3) 吉田洋一, 赤根也, 『数学序説』, 培風館, 1965
- (4) 高木貞治, 『解析概論』, 岩波書店, 2002
- (5) 遠山 啓, 『数学入門』, 岩波書店, 1975