＊＊＊＊＊＊＊
＊　論　文　＊
＊＊＊＊＊＊＊

大学教職課程「解析」のカリキュラム

東洋大学　佐藤　章
早稲田大学高等学院　武沢　護
千葉科学大学　渡辺暁生

１ はじめに

本論文は，早稲田大学数学教育学会誌上に「論説」として発表してきた A「教職課程『解析』のめざすもの 2003 年[1]」，B「教職課程『解析』の授業をどう進めるか 2004 年[2]」，C「教職課程『解析』へのアプローチ 2005 年[3]」の流れを土台とするものである．

なお，標題の「カリキュラム」の意味であるが，単に教育課程に狭めるものではなく，より広い意味で，教育の目的，教育内容を超えて，教授活動やそれに対する教師の構えのようなものまで拡大して教育にアプローチする姿勢そのものまでも含めることにする[4]．

この論説 A，Ｂ，Ｃの概略は「教職課程では何を教えたらよいのだろう？」がテーマであるが，最初の論説 A で述べたように，約 100 年前のクラインの指摘（下記）が現在の日本にも，そのまま当てはまるのではないか，という視点からスタートした．

「…それは高等学校の教師になろうとする学生に，種々の要求に応ずる適切な訓練を課すことに関してである．…長いあいだ，大学で独占的に数学の研究が行われたが，しかもその研究では高等学校に何が必要とするかも考えなかったし, また高等学校の数学との結びつきをつくろうともしなかった」（「高い立場からみた初等数学」　F．クライン：東京図書）

「…この断絶は長い間続いており，また学校教育における習慣の改革を妨げていた．すなわち学校では，与えられた定理が大学でどのように仕上げられるか，についてはほとんど注意を払わないし，そのため定義についても，今はそれで十分であろうが，先の研究に応じられないようなもので満足していることが多い．……　逆に大学では，高等学校で教えたものに密接に連絡することなど考慮せずに，大学独自の体系をつくりあげ，２，３のものだけをまったく的はずれな " これは高等学校ですでにやったことだ " ということばですませている．」(同上)

さらに，このことを打開していくために論説Ｂにおいて教職課程の授業の進め方として，次の三つのパターンをあげた．

・高校の授業から出発し，そのために「大学でなにを学ぶ必要があるか？」を検討して教職課程に

おける授業内容を計画する（例えば「自然対数の底ｅの導入」）

・数学の応用面に注目して教材を選ぶ，その土台となる高校での授業内容を意識しつつ授業計画を立てる（例えば「微分方程式」）

・小中高の教材の内容をより厳密に見直す（例えば「角」について）

このように将来，教員になった時に行う「授業」が土台となる以上，その「授業」（受験準備中心ではない）の方向性を明確にしていく必要がある．これに関して論説Ｂでは，

・この論説における「授業内容についての方針」としては応用面（教材間の関連も含める）を重視し，学習意欲を刺激する

・コンピュータなどを活用し，視覚的なものなど直感に訴え，また帰納的な方法も利用する

を挙げ，「e」だけでなく「複素数」，「微分方程式」などいくつかの項目で研究・論議を深め，そして，学生たちが教壇に立った時「大学の教職課程で学んだことが本当に役に立った」と振り返るような内容を目指すことが重要であると指摘した．

一方，「授業を受ける側の学生の状況」を分析することが重要であり，これについては論説Ｃでは，

・授業計画を立てるに当たっては，「高校・大学の間にある入学試験」，「高校教育の多様化」，「様々な入学試験」，「新カリキュラムの実施に伴う混乱」など多くの問題を考慮する必要がある

と指摘した．そして，例えば「高校の微積分」，「大学の微積分」を別個に議論するのではなく，高校から大学までを一つの流れとして捉えるという視点をあげ，これに関連させて，

・新しい試みとして，高校と大学の連携を意識したコンピュータによる授業，及びこれに対応した「コンピュータ利用を前提とした高校大学連携の視点をもった解析学（積分の導入にあたっての実験的アプローチ）」

を提案した．

さて，本論文は次の三つの部分

2　大学1，2年生の状況分析，　3　「望ましい」カリキュラム，　4　カリキュラムの事例

からなり，論説 A, B, C を統合，発展させ論旨を明確にし，具体的な授業計画を提案することが目標である．

2では，東洋大学での「高校における数学履修状況に関するアンケート」，「教職課程履修学生に対する同様の調査」に基づいて主に「数量的な分析」を行い，さらに東洋大学，千葉科学大学における授業の感想などによる「質的な分析」を加味した．

3は，授業計画の概略である．ここでの「望ましい」の内容は基本的には冒頭にまとめた「三つの論説」の内容であるが，本論文ではさらにそれを明確にするために，前述の「授業内容についての方針」を補足する観点として，「学習した内容が，その後どのように使われるか？」「それが『数学』の中で，どのような意味を持つか？」を付け加えた．全体としては次の4 と併せて本論文の具体的な表現である．

4は，二つの事例「4．1コンピュータを利用した授業研究」，「4．2複素数の導入と応用」からなっている．これは3で記述した本論文の意図をより綿密かつ具体的に研究したものであり，「事例集」への第一歩でもある．

2　大学１，２年生の状況分析

ここでの分析は，東洋大学工学部情報工学科１年生（2006 年入学）および千葉科学大学薬学科１年生（2006 年度入学生）を対象にしたものである．

2.1　量的な分析

2.1.1　高校時代の数学各科目の授業時数

次の図２−１は，東洋大生の高等学校での数学各教科の週当たりの授業時間である．

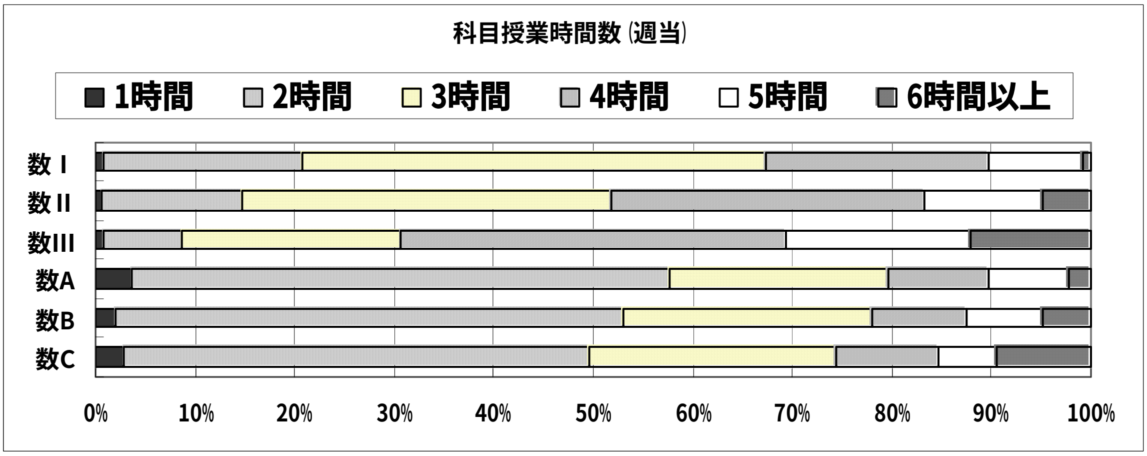


図２−１　数学の週当たりの授業時数

現行の高等学校学習指導要領での標準授業時間数は，数学Ⅰ（3 単位）数学Ⅱ（4 単位）数学Ⅲ（3 単位）数学 A（2 単位）数学 B（2 単位）数学 C（2 単位）となっているので，多くの学生は標準時間に近い環境で数学を履修してきていると考えてよい．この状況はおそらく全国の高等学校もほぼ同じであろう．

2.1.2　数学 B，数学 C の選択について

具体的に数学Ｂや数学Ｃの内容をみていく．（東京書籍「数学Ｂ」[5]，「数学Ｃ」[6]より）

【数学Ｂ】

「数列」「ベクトル」のほか，

「統計とコンピュータ」

資料の整理（度数分布，相関関係），資料の整理（代表値，標準偏差，相関係数）

「数値計算とコンピュータ」

簡単なプログラム（BASIC），

アルゴリズム（最大公約数，素因数分解，方程式の近似解，面積の近似計算）

【数学Ｃ】

「行列とその応用」「式と曲線」のほか，

「確率分布」：条件付き確率と乗法の定理，確率分布

「統計処理」：正規分布（二項分布，正規分布），統計的な推測）

次の図 2―2，図 2 - 3 は，東洋大生の高等学校での数学 B，数学 C の選択状況である．

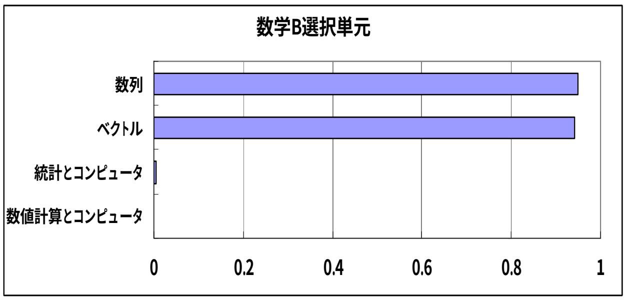


図 2―2　数学 B の選択

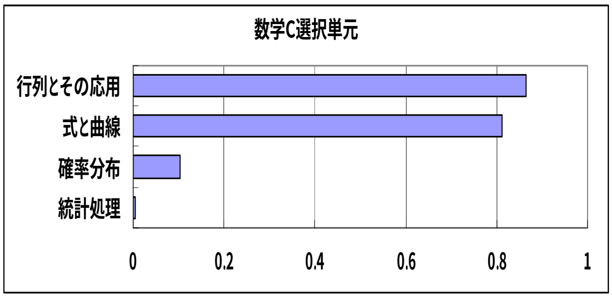


図 2―3　数学 C の選択

おそらく，全国の高等学校での状況もほぼ同様と考えていいだろう．この「コンピュータ」や「統計」などが選択されないことについては次のような理由が考えられる．

（i）高等学校での数学に割く授業時間が限られている上に，大学入試の問題にあまり出題されない
（ii）統計などでは，手計算が大変な部分がある（分散，標準偏差など）
（iii）教員自身，高等学校時代にこの分野の学習経験があまりない
（iv）数学科出身の数学教員に「統計」「コンピュータ」の有用性をあまり見出していない

もちろん，数学 B における「数列」や「ベクトル」，数学 C における「行列」，「曲線」は非常に重要な内容なので，これらを履修させることは妥当である．しかし，すべての生徒がすべて同じ内容を学ぶ必要はなく，次に述べる観点からも生徒達が学ぶことができる環境を整えることが重要と考える．

2.1.3　確率・統計やコンピュータを学習する必要性

確率・統計的なものの考え方は，分野（文系，理系）を問わずこれからの高度情報通信社会に生きる人間の基本的なリテラシーである（新聞を正確に読む，ニュースを正しく聞くなど）．また，コンピュータを活用した数学の学習の有用性はいうまでもないことだろう．そして，コンピュータが発達したいま，統計の計算は数式処理ソフトウェア，統計専門のソフトウェア，表計算ソフトウェアなどを活用すれば比較的容易に学習できる．

また，コンピュータを活用することによって，統計だけなく，空間図形，数値計算など実験的，発見的な学習を行うことが可能になる．確かに現在の高等学校では教科「情報」が必修になり，コンピュータ関連はすべて「情報科」で行うような風潮があるが，やはり一般教科のなかでも積極的に活用することが重要であると考える．では，具体的にどのように授業展開できるのだろうか．そのことについて次に述べる．

2.1.4　統計やコンピュータの授業プラン

コンピュータを数学に活用する場合の基本的な姿勢は，コンピュータの学習のために数学の題材を使うのでなく，数学の授業のなかにスムーズにコンピュータを取り入れることである．このことが重要である．特に数学Ｂにおける数値計算とコンピュータの内容は，それぞれの単元で学習可能であり，その方が効果的である．最大公約数，素因数分解，二次方程式の近似解，二分法は数学Ⅰ，台形公式

による面積の近似計算は数学Ⅱもしくは数学Ⅲにおいて展開可能である．統計に関しては，独立に授業計画を立てる必要があるが，これも表計算ソフトウェアなどを活用することで展開可能になる．

2.2　質的な分析

今年度，千葉科学大学薬学科１年生対象に前期授業を行った．これは主として高校の復習の「微積分」であるが，本論文「はじめに」で述べている

「学習した内容が，その後どのように使われるか？」

「それが『数学』の中で，どのような意味を持つか？」

という視点を重視して行った．

この授業終了時における「４月から７月までの授業をふりかえり，微積分について考えたこと，感じたことなどを書いてください.」という問いかけに対し，多くの興味ある回答がかえってきた．その中から「高校での授業の状況が推測される」ものを中心に，いくつか（部分的に）を列挙する．

A．高校では単純に「微分と積分は逆の関係にある」と習って問題をたくさん解き，パターンを覚えるといった方式だった．実際には微分と積分はまったく違う時代に発達したものだと知り，時間をかけて数学を学んだことで，高校時代の数学に対していだいていたイメージを良いものに変えられたと思う．オイラーの公式やマクローリン展開など単に難しい，分からないと思っていた数式についても，一部だが理解できたり，すごいなと感じることができるようになったのは，私の中で大きな変化であったと思う．…

B．高校での「公式を覚える」,「とにかく問題を解く」などというくだらないことよりも，こういった「理解する授業」の方が好きなので面白かったです．「大学の数学だから難しい問題を」という意見がありましたが，私はこの講義はとても「大学らしい」講義であったと思います．（数学科では話が別かもしれませんが…）

微積分についても，高校では公式を覚えて，ひたすら問題を解いて終わりだったので，微積分の成り立ちや，何のために，他の分野での微積分の利用等については全く教わりませんでした．特に後者については真っ先に教えるべきだと思うのですが，目的も分からず問題を解いても仕方がないと常に思ってきました．…

C．３ヶ月間「微積分」について学んで，高校の時の数学とは違って，いろいろな分野につながっていることを知りました．特に物理の中でも数学の公式がたくさんでてきて，微積分で速さなどを求められることには驚きました．

定積分とか，不定積分とか細かく分かれていて，すごく計算しづらいイメージが高校の時から感じていたけど，意味が分かると，そのようなたくさんの意味があるから，分かれているんだと納得できたし，取り組みやすくなりました．

これからは，もっとたくさんの数学の分野の意味を理解して，解いていけるようになりたいと思いました．…

D．高校でやったことが多かったので，もう一度復習になって良かったです．微積分については定義をたくさん教えてもらったので，どういう時にどのように使うかがわかるようになりました．高校ではただ公式を覚えるだけがほとんどだったので．このように深いところまで教わることができてホントに良かったです．…

E．微積の公式だけを覚えて問題を解こうとすると，公式を忘れていたり，応用が効かなく解けない問題も出てくるけれども，基本をしっかり身につけ微積は何を求めるかや微積の意味を考えながら解くと，公式だけでは解けなかった

問題も簡単に解けるようになると思った．大昔に数学の公式や法則，記号や考えを思いついた人の頭の中はどうなっているのか，とても不思議です．もしタイムスリップできるなら，公式のない時代の数学を勉強してみたいです．

Ｆ．…　４月から数学で微積分を学んで，微積の奥深さを知った．特に微分についてはとても驚かされた．……　高校の時，物理などでこうしたことは知っていたが，なぜ用いることができるのか分からなかった．またオイラーの公式などがある．まだ理解できたとは言えないが，この公式は昔から使われていたのだと知って，数学って奥深いなとつくづく思った．数学という教科は「正確な答えを導き出す」「速く計算する」という印象があったが,「理解すること」というのを重点にやってもらった気がする．…

Ｇ．高校の数学の復習でもあり，また原理から理解しようという新しい数学という感じもしました．ただ計算していくのは一度身に付いてしまえば，とても簡単なことであるけれども，公式の原理を覚えながら解くというのは正直，面倒で複雑だなぁ，と初めは思いました．しかし，一度自分で証明が完成したとき，また，他の部分との関係に気付いたときは少し感動モノでした．…

Ｈ．４月から７月までの間で，僕の中の微積分に対するイメージが大きく変化したように思えます．以前，微積分は難しそうで，計算が大変そうだというイメージがありました．しかし，授業を受けているうちに，微積分は公式と計算の仕方を理解すれば実は簡単で，奥深いものだと分かりました．また同時に微積分の重要性も知りました．

オイラーの公式とのつながりや，級数展開など新しいものに触れて，高校数学とは違った数学の面白さを改めて感じたような気がします．…

Ｉ．高校の授業は受験のための勉強だったので，速く問題が解けるように，たくさん問題を解くだけでした．公式を覚え問題を解くのくり返しでした．今日やった面積を求める式も，$S=\int_a^b\left\{f(x)-g(x)\right\}dx$ も，なんでグラフ上で上の式から下の式を引くのかもわからずに，ただ公式のまま解いていました．まあ，難しい問題を自力で解けた時は感動してちょっとうれしかったりもしましたけど，これが何の役に立つのかなと疑問に思う時もありました．でも，大学に入って先生の授業を聞いてなんだか少しだけ数学が身近に感じることができました．数学と物理の関係や「博士の愛した数式」に出た公式の話など授業中に話してくれて面白かったです．

Ｊ．微積分は，受験でかなり勉強していた単元ですが，計算さえできればいいと思っていたので，定義などは軽く触れるだけで，４月までは全くわからない状態でした．４月から７月までの授業を受けて，定義を理解することができました．いままで公式だけを覚えて，機械的に計算していたので，定義を身につけることによって，計算の意義が分かったり，楽しく解きやすくなりました．数学はとても深い分野だなと改めて思い，楽しく思いました．

Ｋ．いままで微分は傾き，積分は面積を求めるもの程度のものとしか考えていなかったが，この講義を通して微分は微分の広がりだけでなく積分の広がりへも影響を与えていること,同様に積分から微分への広がりへの影響を与えるということが分かり，微積分の奥の深さを実感できたと思う．今までの数学はただ計算をするだけだったり，テストのことだけを考えての内容ばかりだったが，この講義では公式ができるまでの過程，歴史等を知ることができ，とても新鮮で興味深い内容ばかりだったと思う．表ばかりでなく裏側にまで眼を向けることが大切だということを学んだ．そして興味があることは自分が納得するまで追求することが大事だと言うことを学べた．………

L．はじめは，また高校でやったことかぁ〜…　といやだったけれど，先生の授業は今までの授業とは違って，１回１回の授業がとても奥深かったです．ただ暗記していた公式も他の式から結びついていたりだとか，物理っぽいこととか，これも全部「数学」なんだなぁと思った．微積分も色々な見方や考え方があって，今まで嫌いだったけどおもしろかった．………

M．受験では，ただ解いていただけの微積分は，根本的な解説によって，違った見方から問題に挑むことができた．意味も考えずに，やたらと解いていた受験時期の数学と詳しい解説をしていただく数学とでは，やはり後者の方が興味がもてるし，「なるほど」と思うことも多かったと思う．………

以上の回答を分析すると，

①　高校での授業内容はいろいろあるのだろうが，ひとつの傾向として「受験対策中心」の授業が数多く行われていることが推測される．数Ⅲを履修していても，それが「受験対策の内容の履修」で終わっている場合が多いのではないだろうか．

②「本論文で述べているような内容の微積分の授業」の必要性（教職課程以外でも）が読みとれる．

③「数学嫌い，数学離れではない（参照：本学会誌アンケート調査)」面も感じさせる．そしてこれらのことは，教職課程以外の場合も含めて，一般的に検討する価値のある事項であろう．

また，東洋大教職課程の授業に関する感想のまとめは（2005 年度論説 C 参照．感想文は省略）次のようになっている．（再録）

④ 数学を暗記科目として考えていたが，この授業をとおして，数学を解くことだけでなく，定義や定理が何であるのか，という根本的なことを理解できた．

⑤ 授業は単調に公式，定義や定理を鵜呑みにして，問題を解くことだけではなく，その本質を理解させるためには種々の方法を身につけておくことが必要である．

⑥ 一方，文字による説明では理解し難いので，「数字を使って説明して欲しい」という要求もあった．はじめは何を言っているのか分からなかったが，文字に数を代入して説明して欲しいということが，後でわかった．これらは中学で習う文字，文字式の意味の理解が不十分なためである．

⑦ 現場での教師の話が聞けたことが，学生にとって一番印象に残っている．「百聞は一見にしかず」，これほど説得力のある授業はないと思われる．

以上のことより，東洋大教職課程でのカリキュラムおよび授業方法（※）の方向性は間違っていないのではないかという感触を得ることができた．

（※）　これまで公式や定理は既知のものとして学習してきた学生に対して，公式，定義や定理などの証明をまじえて，解析学が展望できるような授業を心掛けた．したがって，微分／積分の歴史的な経過から（『数学序説』[3]），最終的には極限の取り扱いや実数の定義（『解析概論』[7]）などが理解できるような授業方法である．ただし，『解析概論』はこのような本（実数の定義）もある，という程度に紹介のみしている．そのため，微分／積分の細部にわたる項目や演習は省略している．また，工学部共通の『微分積分学序論』では，第一章に「極限と連続」があり，これらを先に説明（定義）しているがここでは最後にそれを説明する方法をとっている．主な項目を列挙すると次のように

なる.「解析学の成り立ち，接線とは，微分の意味と応用，積分の意味と応用，微分積分の基礎定理，極限の概念と定義，実数の概念と定義」

３　望ましいカリキュラム（教育内容と方法）

本章では，まえがきに説明したように「カリキュラム」を広義にとらえて，教授する範囲（項目／内容）と教授法（授業計画）を合わせたカリキュラムを提示する．

大学に入学した後，大学生が数学と関わるのは，一般に，次のような形で勉強することになると考えられる．

a) 数学を専門的に学ぶ（例えば数学科）

b) 数学を使う（利用する）ために学ぶ（例えば物理学科，理学／工学部）

c) 数学の特定の分野のみを使うために学ぶ（例えば経営／経済学科）

d) 中学／高校で教員として教えるために学ぶ（中学／高校の教員をめざした教職課程）

これらの分類において，a)と d)は似ているようで，意外と似ていないし，また，b)と c)も似ているようで異なると考えられる．数学科に在籍して教職の免許を取得する場合には，教職課程の数学科目のほとんどが数学科の科目に含まれてしまうので，意識して「教職のための数学」を勉強する必要はない. しかし, 数学科に在籍していない学生, 例えば工学部の学生が教職課程を修得しようとすると，教職課程独自の数学科目を勉強することになる．また，数学科と教職を除く学生のうち，数学を学ぶ学生のほとんどは数学を利用する為に勉強すると考えて差し支えないと思われる．このような観点から，大学での数学を考えると，数学を専門に学ぶ，数学を利用する為に学ぶ，中学／高校で教える為に学ぶ，の３種類に分けて考えることが可能と思われる．ここで，我々が問題にしている教職のための数学を“どのようにして教えたらよいかが問題”となる．

かつて，情報社会が到来するときに,「コンピュータリテラシ」に対する議論が行われ，コンピュータをどの程度理解させるかという観点から，コンピュータ教育の議論がなされた．数学教育とは異なる側面もあるが，同じような議論が成り立つと考え，ここに整理した．

コンピュータリテラシでは，コンピュータを単に使えればよい（ブラックボックス：black box)，コンピュータの原理を理解する必要がある（ホワイトボックス：white box)，また，必要に応じてその中間でよい（グレイボックス：gray box）という議論があった．

このような見方を大学での数学に適用してみると，

・定義／定理の意味が分からなくとも利用できればよい（ブラックボックス）

・定義の導入原理や定理など数学の内容そのものを理解している（ホワイトボックス）

・それらの中間的な理解ができればよい（グレイボックス）

に分けて考えることが出来る．ブラックボックスという見方は，それ以上の発展は期待しないが，縦横に利用できればよく，ホワイトボックスは原理／原則が理解できれば，これまでの数学をさらに発

展した理論や新たな利用方法などの進展が期待される．一方，グレイボックスは，数学全般に対してではなく，必要とする分野に対して公式の原理や数学的な原則が理解できことが期待される．このように考えれば，上記 a) はホワイトボックス，b)，c)はブラックボックス，d)はグレイボックスとして数学を学ぶという見方が成立する．

教職を目指した数学では，これまでの調査や中学／高校でのカリキュラムの分析[1],[2],[3]から，まさしくグレイボックスの見方が要求されると考えられた．このような観点から，教職での数学，解析学のカリキュラムを検討した．それを以下に述べる．

中学／高校での教育現場に役立つための教職の数学（解析学）という前提から，

(1) 解析学の範囲を中学や高校で取り扱う内容とその周辺の知識に限定する

(2) それらの範囲で定義や定理の原則，考え方，構造を取り扱う

(3) これらを理解するために，歴史的な背景やコンピュータを使用した実験方法などを導入し，理解を深める

(4) 学生が積極的に考えて学習できるように，興味をもつような教授法を考える

このようなカリキュラムを検討し，次のような内容を構成した．

3.1　教える範囲（項目／内容）

上記のような問題を解決すべく，ここでは，高校／大学まで微分や積分などが定義された背景（歴史）とその原理的な考え方を詳しく説明し，定理として記述されているものと他の項との相互関係が理解できるように努めた．これらを[Ⅰ]「基本原理」とする．

また，極限の考え方と定義を理解するために，コンピュータを利用し，通常の授業時間では短時間で説明することが困難な事象をコンピュータの出力を示すことによって，極限の世界，無限大の世界を，近似的に視覚的に示して理解を深めるようにした．いわゆる，ビジュアルな数学の実験である．これらを，[II] 「基本原理を展望する為の実験」としてまとめる．

さらに，学習した内容がどのように利用できるか，何のために数学を勉強するのか，に対する理解を深めるために，[III]「微分／積分／微分方程式の利用」としてまとめる．これは数学が現実の世界でどのように役立っているかを理解させる狙いである．一方，数学の体系は広がりを示しているが，微分，積分と微分方程式相互にどのような関連があるかを理解できるように，相互の関係性が展望できるような材料を，［Ⅳ］「微分／積分／相互の関連性」にまとめる．

そして最後に，コンピュータを活用した授業についての事例を挙げる．これらはコンピュータを利用すると非常に効率よく授業が展開できると考えられる内容を説明する，たとえば，数値計算，確率の問題，統計処理などが考えられる．これらを[V]「コンピュータを用いた数学実験」とする．

[大学教職課程における解析学の項目]

[I]　基本原理

1) 微分学　2) 積分学　3) 微分積分学の基本定理　4) 微分方程式

[II]　基本原理を展望する為の実験（Mathematica など）

1) 微分　2) 積分　3) 微分方程式

[III]　微分／積分／微分方程式の利用

[IV]　微分／積分／相互の関連性

[V]　コンピュータを用いた数学実験(Mathematica や excel を利用)

1) 授業研究　2) 数値計算　3) 統計計算

3.2　授業計画（教授方法）

授業を受ける学生は，これから学習する内容がどのような位置づけをもち，役に立つかなどを期待しながら講義を受けている．このような他との関連や位置づけが分からないと理解が深まらない．

たとえば，高校の数学の積分を例にとると，数学 II の教科書（山本芳彦編，啓林館，H11 年度）で「不定積分」があり，ここでは落下運動を事例として，

「このような問題では，関数 f(x) が与えられたとき，微分すると f(x) になるような関数を求める，という，微分の逆の演算が必要になる」

と説明し，不定積分を

「関数 f(x) に対して, f(x) を導関数にもつ関数 F(x), つまり, F(x) = f(x) であるような関数 F(x) を, F(x) の原始関数という．そして，F(x)+C （ただし，C は任意の定数）を f(x) の不定積分といい，$\int f(x)dx$ で表す」

と定義している．これらは落下運動を事例として自然界とのつながりをもっているが，積分は本質的に，微分の逆の演算としてのみ定義してある．数学 III の教科書（藤田宏，前原昭二編，東京書籍，H10 年度）でも同様な説明である．

一方，大学の教科書(林平馬ほか，微分積分学序論，学術図書出版社，2002,11)も同じような定義の仕方を行っている．求積法については，項を改めて他の項目とは独立した形で説明をしてあるので，不定積分，定積分との相互関係について理解することは困難と思われる．これらは高校からの説明を引きずっており，微分の逆演算という説明方法に起因したためと考えられる．

これらの事例からも分かるように，学生がこれまでにどのようにして積分を理解しているかを聞いてみると，単純に微分の公式

$$(x^n)'=nx^{n-1} \quad (\sin x)'=\cos x \quad (\cos x)'=-\sin x \quad (e^x)=e^x \quad (\log x)'=1/x$$

の逆演算を思い出す．公式のみが頭に残っているようである．したがって，求積法も習っているが，積分の公式との関係, 面積との関係, 極限値としての面積などの相互関係が不明のままになっている．微分／積分の材料は揃っていたが，順序良く，相互の関係までは理解できず，ばらばらの知識が残っているだけという印象が深い．その結果，解析学の体系としての理解，相互の関係が分からないために，発展性がなく，教えるのに苦労すると考えられる．

そこで，教職の解析学では，前項に提示した内容をそのまま理解／教授するのではなく，[I]の原理

を学習し，その理解を深めるために[II]の実験，そして必要に応じて，[III]の応用，さらに相互関係を理解するために[IV]を説明する，といった教授法が考えられる．このカリキュラムでは，そのような教授法を可能とするための材料を提供することを心掛けた．これらの具体例として「4　ｶﾘｷｭﾗﾑ事例」を参照していただきたい．そこには教授内容はともかく，望ましい教授法を記述した．

4　ｶﾘｷｭﾗﾑ事例

4.1　コンピュータを活用した授業研究

数学の授業を展開するにあたって，もちろん論理展開を厳密に行い，形式を整えた形で事柄の説明を行うことは重要であるが，値を実験的に求めたり，その題材の発展性を方向づけることも重要である．このようなとき，コンピュータを用いた数式処理ソフトウェアは非常に効果的である．数学的事実のうち，論理的に追いにくいものや手計算が困難なものについて，Mathematica の助けを借りようというものである．学生にとっては，いろいろ実験的に数学の学習を行うことで，発見的な学習態度を身につけることができる．ここでは，Mathematica を用いることが有効だと考えられる極限操作や数値計算を例にその方法を挙げる．

4.1.1　微分

(1)　関数の極限

関数の極限では，単に極限計算することよりもその関数をいろいろな角度から眺め，実験的に極限計算を行うことで理解を深めることが重要である．関数 $f(x)$ に対して，$\lim_{x\to a} f(x)$ を考えるとき，Mathematica を用いることで，次のような STEP が考えられる．

[STEP]

①　関数 $f(x)$（$x=a$ 付近）のグラフをかいて様子をみる

②　関数 $f(x)$ に対して，$x=a$ 付近の値を代入して計算する

③　Mathematica における組み込み関数 **Limit** を使う

このようなステップを踏みながら，その極限の理解を深める．（4.1.3 の例を参照）

(2)　微分係数とテーラー展開（関数の近似）

微分係数の計算では，単にある点における「接線の傾き」に留まらず，その点における関数の１次近似という視点を強調した上でテーラー展開に発展させる．これらの様子を Mathematica を用いて行うことができる．

[STEP]

①１次近似（線型近似）　②テーラー展開

Mathematica のコマンド **`Series`** を用いて, ある点の周りにおける近似多項式を求めることが可能になる．また，この様子をグラフィックス機能を用いて視覚的に確かめることもできる．
（4.1.3 の例を参照）

(3)　自然対数の底 e の導入

自然対数の底　e　はなかなか理解しにくい数の一つであろう．その存在を実感するために Mathematica を用いていろいろ数値実験的に計算することは有効である．

[STEP]

①$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$=1 となる a　を求める．

定数 a　を求めるために, Mathematica を利用することで実験的にいろいろ試行錯誤する．

```
f[a_]:=Limit[(a^h-1)/h,h->0]
```

まず，a　の範囲をまず 2<a<3 に絞りこむ．次に，上記の結果をみて 2.7＜a <2.8　と 10 分の１の区間に絞る．さらに，2.71<a<2.72 と絞りこむ．このような作業を繰り返すことで，自らで e の値の近似値を求めることができる．

②　$\lim_{h\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ ＝e　を確かめる

次にこの値を計算することで，e　の近似値を求める．ここで Mathematica を用いる．

```
g1[n_]:=(1+1/n)^n  Table[{n,g1[n]},{n,1,10}]//N//TableForm
```

このような STEP を経ることで，e の実在を実感する．

(4)　方程式の近似解（数値計算）

[STEP]

①　二分法　　②　ニュートン法

方程式の近似解を求めるために, 二分法からニュートン法へのステップで行う. 微分との関係では, ニュートン法が関係深い．微分の応用的な観点と方程式の解を数値的に求めることができることを Mathematica を用いて実感する．

4.1.2　積分

積分の導入にあたっては微分と独立させるという意味においてリーマン和による定積分の導入が適切である．

[STEP]

①コンピュータによる定積分の導入

リーマン和による定積分の導入を行う．これは計算上の問題はあるが概念的に理解しやすいアプローチである．

②原始関数の構成

積分を逆微分で定義することは原始関数の存在を前提にしており，理論的に難点がある．ここでは数値計算の手法で原始関数を構成するアプローチとする．

③定積分の数値計算

リーマン和は概念的には理解しやすいが，数値計算としては誤差が大きく実用的ではない．ここでは台形公式とシンプソンの公式とで数値計算の誤差を評価しながら定積分を計算する．

4.1.3　コンピュータを活用した授業プラン

ここでは，いくつかの授業プランを提案する．

(1) 関数の極限

関数の極限を Mathematica を用いて，いくつかのアプローチでとらえる．

例　関数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ に対して $\lim_{x\to 0} f(x)$ を考える

①　グラフを描く（図 4−1）

まずは関数を定義する．

```
g[x_]:=1/(Exp[1/x]+1)
```

次にグラフを描いてこの関数の様子を概観する．

```
Plot[g[x],{x,-10,10},PlotRange→{-0.5,1.5}]
```

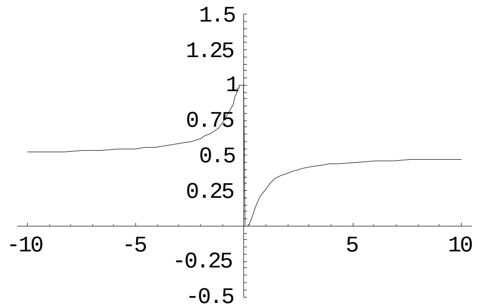


図 4−1

②　数値リストを作成する

この関数はｘ＝0 では定義されていないけれど，ｘ=0 での極限をみるためにｘ＝０付近の数値を代入することで，極限の様子を把握する．

```
Table[g[x],{x,-0.5,0.5,0.04}]
```

{0.880797 , 0.897882 , 0.915363 , 0.932867 , 0.949845 , 0.965555 , 0.979085 , 0.989496 , 0.996149 , 0.99921 , 0.999955 , 1., 1., 1.92875×10^{-22}, 5.77775×10^{-8}, 0.0000453979 , 0.000789866 , 0.00385103 , 0.0105038 , 0.020915 , 0.0344452 , 0.0501552 , 0.0671335 , 0.0846368 , 0.102118 , 0.119203 }

上記グラフや数値リストから容易に想像できるように，この関数はｘ＝０では左右違う極限を持ちそうなことがわかる. Mathematica では左極限, 右極限をおのおの次のように計算する. そこで, 次のような Mathematica の組み込み関数を利用する.

③　組み込み関数を利用する

```
Limit[g[x],x→0,Direction →1]
```
1

```
Limit[g[x],x→0,Direction →-1]
```
0

(2)　テーラー展開による近似

次は関数の列の極限を考える． $x=a$ のまわりで微分可能な関数 $f(x)$ に対してこの関数を多項式で近似することを考える．これは，関数のテーラー展開である．このテーラー展開が関数 $f(x)$ に近づく様子を Mathematica で描かせ, 関数の列がもとの関数に近づく様子を視覚的にみることによって, その理解を深める．まず，sin のテーラー展開の関数を定義する．

```
taylorsin[n_,x_]:=Sum[(-1)^(k-1)  x^(2k-1)/(2k-1)!,{k,1,n}]
```

例として，５次までのテーラー展開したグラフを描く.

```
Plot[taylorsin[5,x],{x,-3Pi,3Pi},
          PlotRange→{-3,3},AspectRatio→Automatic]
```

１次から７次までのテーラー展開したグラフともとの sin 関数を同時に描く．（図 4－2）

```
Plot[Append[Table[taylorsin[k,x],{k,1,7}],Sin[x]]//Evaluate,
          {x,-3Pi,3Pi},PlotRange→{-3,3},AspectRatio→Automatic]
```

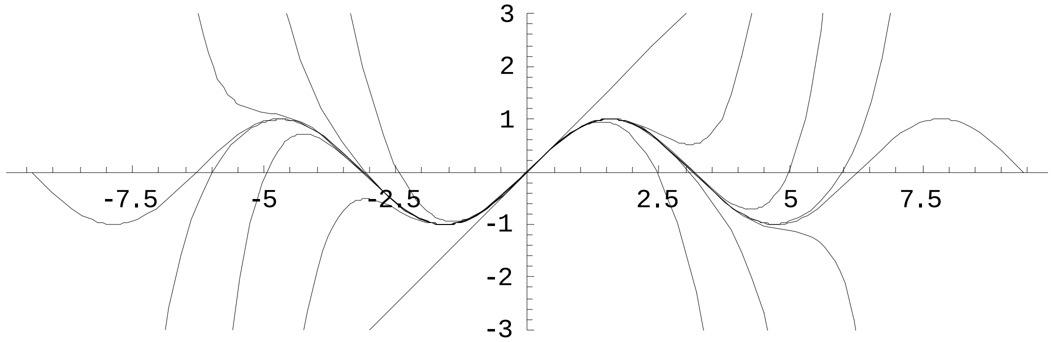


図4－2

次に，１次から７次までテーラー展開を順次，グラフ化した.

```
Table[Plot[{Sin[x],taylorsin[k,x]},{x,-3Pi,3Pi},
      PlotRange→{-3,3},AspectRatio→Automatic],{k,1,7,2}]
```

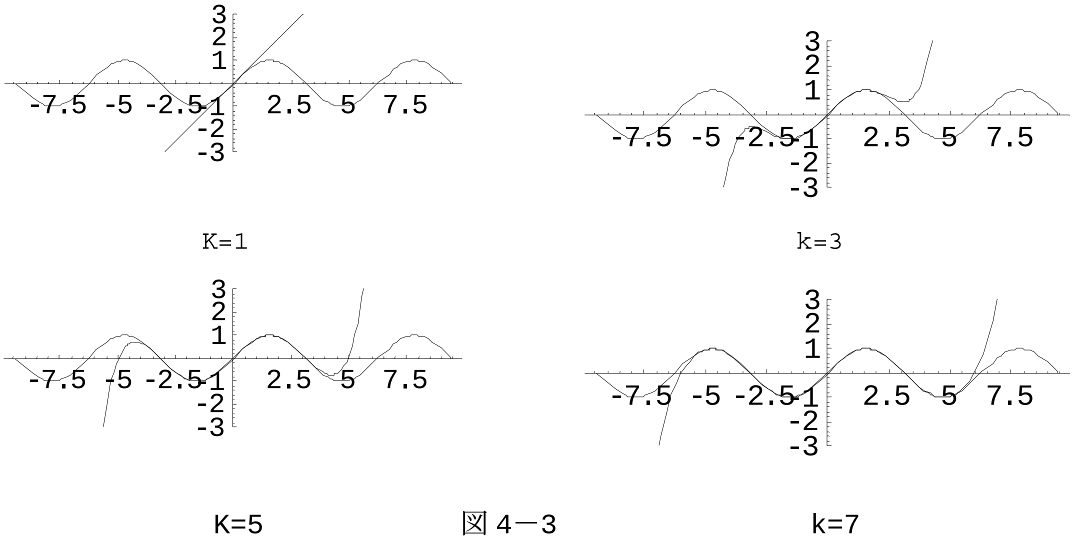


図 4－3

一般の関数にも適用できるように定義式を次のように書き換えた.

```
taylor[f_][a_,n_]:=Sum[(D[f,{x,k}]/.x→a)/k!  (x-a)^k,{k,0,n}]
```

sin 関数の 11 次までの近似である.

```
taylor[Sin[x]][0,11]
```

$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^9}{362880}-\frac{x^{11}}{39916800}$$

次は，コマンド **Series** を用いて，原点のまわりで 11 次多項式によって近似した.

```
Series[Sin[x],{x,0,11}]
```

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \frac{x^{11}}{39916800}$$

これをもとに，新たな関数ｓ**[x_,n_]**をつくる.

```
ｓ[x_,n_]:=Series[Sin[x],{x,0,n}]//Normal
```

そして，１次から 10 次で近似した様子をグラフ化したものが次の図である.

```
Plot[Table[s[n,x],{n,1,10}]//Evaluate,{x,-3Pi,3Pi},
      PlotRange→{-3,3}, AspectRatio→Automatic]
```

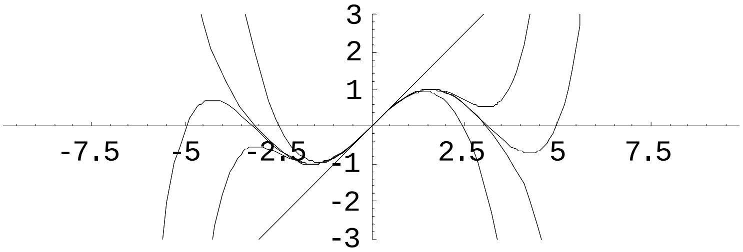


図 4―4　三角関数のテーラー展開

なお，整級数展開は，テーラー展開とよく似ているが，概念は全く違うものである．テーラー展開が次数（ｎ）を固定して，ある点ｘの近傍での近似を考えるのに対して，整級数はｘは固定され，ｎを無限大へと動かす.

4.2　複素数の導入と応用

実際に授業を進めていく場合，単に単元を順番に取り上げていったのでは，豊かな内容の緊張感のある授業にはならない. その単元を学習する意味を明確にし, 取り上げる教材を互いに結びつけて「流れ」をつくり出し,「数学上の位置づけ」と「応用の展望」の理解を得ることが重要である．場合によっては章の枠を取り払うことも必要であろう．将来このような授業ができるように，教職課程ではこれに対応した内容の授業を行いたい．ここでは，ひとつの例として「３．望ましいカリキュラム」を土台とした「複素数の導入と応用」をとりあげる.

4.2.1　現在の高校の教科書における「複素数」の問題点と考察

数学Ｂ（数研出版）では

（ただし，これは旧指導要領による教科書で，新指導要領（本年度の大学１年生が該当）では，複素数は数学Ｂから削除され，数学Ⅱの２次方程式で記述されているだけである．従って「教科書通りの授業を受けてきたと仮定すると,「大学１年生の複素数の知識はほとんどゼロ」ということになり〈次回改訂で復活するうわさもあるが〉，この状況を下限とする必要がある．将来どのように扱われていくかは不明確であるが，いずれにしても「基礎知識として重要である.」という視点でとりあげる.）

………　例えば二次方程式　$x^2+3=0$　すなわち　$x^2=-3$　は　実数の範囲では解を持たない.

そこでこのような方程式も解を持つように数の範囲を広げる．平方すると－1になる新しい数を１つ考えて，これを文字iで表し，虚数単位とよぶ．すなわち$i^2=-1$．更に，$3+2i$　のように，２つの実数a,bを用いて　$a+bi$と表される数を考え，これを複素数という．…

となっている．

そして，この後複素数の四則計算となる．また，どのように複素数が使われていくかについては，ほとんどふれていない．

問題点（1）　ここでは「i」と「$a+bi$」が続けて導入されている．「i」については，その必要性がある程度理解できるが，「$a+bi$」の必要性は明確でなく，どのように複素数が使われていくかも示されていない．

問題点（2）　「負の数」を新しく導入した場合は「反対の性質を持つ量」，「数直線」，「絶対値」，「大，小」………　などをまず学習し，イメージの定着をはかる．これと比較して，重要な数の拡張であるのにもかかわらず，「複素数　$a+bi$」については，すぐ計算に入ってしまう．問題点（3）　「負の数」は方程式，関数…を経て定着していく環境があるが，「複素数」は専門分野にもよるが，引き続き学習していくことが少なく，学習した内容が忘れられがちである．　大学1，2年生ではこれらの問題点は，多くの場合解決されていない状態にある．と考えられる．したがって，仮にそのまま教職に就けば，例えば「目標なしに，複素数の計算を練習させる」という授業をする可能性が強い．このような問題点を，本論文で述べているところの

・　応用面（教材間の関連も含める）を重視し，学習意欲を刺激する．

・　コンピュータなどを活用し，視覚的なものなど直感にうったえる．また帰納的な方法も利用する

・「学習した内容が，その後どのように使われるか？」「それが『数学』の中で，どのような意味を持つか？」

と結びつけて改善していきたい．

4.2.2　授業計画の方針

・実数における数直線のように，ガウス平面を利用して複素数を考える．

・実数を絶対値と正負の符号で表現するように，極形式での絶対値rと偏角θによる複素数の表現に重点をおく．

・オイラーの公式を早く扱う．可能ならばパソコン(ソフト Mathematica)を活用する．

・オイラーの公式により指数関数と三角関数を結びつけ，$z=re^{i\theta}$の形で複素数をあつかう．（応用面からみるとここがポイントの１つである）

・複素数の応用例を示す

・概念の理解と関係が深くない複雑な計算はやらない．

・厳密性よりも，全体像の把握に重点を置く．

4.2.3　授業計画

(1)　指数関数，自然対数の底“e”の定義

e が「なぜ必要か」,「なぜ重要か」を理解するためには，指数関数 $f(x)=a^x$ で $f'(x)=a^x$ となるような a の値が存在しその値を e とすれば，$\left(e^x\right)'=e^x$ となることがポイントである.（B「教職課程『解析』の授業をどう進めるか 2004 年」を参照)

(2)　級数展開（マクローリン展開）

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4+\frac{1}{5!}f^{(5)}(0)x^5+\cdots$$

（$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots$ とおき，微分を利用して係数を決める.）

Mathematica では,

Series[ｆ[x],{x,0,10}]

と入力すると，(Shift+Enter)で出力される．（出力省略）

(3)　指数関数 e^x の展開

$f(x)=e^x$ のときは $(e^x)'=e^x$，$(e^x)''=e^x$，$(e^x)'''=e^x$，$(e^x)^{(4)}=e^x,\cdots$ となるので，

$f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=f^{(4)}(0)=\cdots=e^0=1$ したがって

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$$

Series[Exp[x],{x,0,10}]

(4)　三角関数 $\cos x$, $\sin x$ の展開

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots \qquad \cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots$$

Series[Cos[x],{x,0,10}]，**Series[Sin[x],{x,0,10}]**

(5)　虚数(単位) $i\ (i^2=-1)$

Solve[x^2-1==0,x]，**Solve[x^2＋1==0,x]**

上記「数学Ｂ（数研出版）」参照

(6)　オイラーの公式（三角関数と指数関数）

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{7!}x^7+\cdots$$

で $x\to ix$ とすれば

$$\begin{aligned}e^{ix}&=1+ix-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}ix^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}ix^5-\frac{1}{6!}x^6-\frac{1}{7!}ix^7+\cdots\\&=\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots\right)+i\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots\right)\\&=\cos x+i\sin x\end{aligned}$$

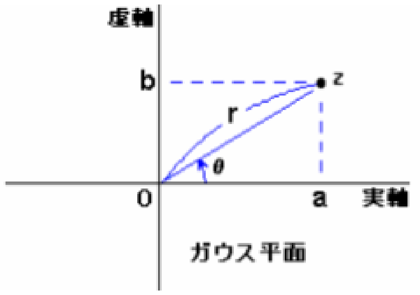
`A = Series[Cos[x],{x,0,10}]`, `B = Series[Sin[x],{x,0,10}]`

`A + I B`を計算し，`Series[Exp[I x],{x,0,10}]`を計算することで，オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を確認する．

(7)　複素数の定義，ガウス平面（複素数平面・複素平面）での表示，計算　のポイント

1) $z = a + bi$　（a, b　は実数）を複素数といい，下記のようにガウス平面上に表す．

ここで　a を実部　$\mathrm{Re}\{z\}$，b を虚部　$\mathrm{Im}\{z\}$　という．



2)　r を z の絶対値といい $|z|$ と書く．$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$　である．

3)　θ を z の偏角といいこれを使うと，$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ となる．これを複素数の極形式という．

4)　オイラーの公式により　$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$　なので，$z = r\,e^{i\theta}$ と表すことができる．

5)　複素数の乗法は，この指数関数による表示を使って，

$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \times r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ となる

(8)　複素数の応用へのアイディアの例

1)　電気回路[9]

正弦振動する現象を複素数で表し．（三角関数で表示されている周期関数を指数関数で表し，扱いやすくする），交流回路の解析をおこなう．（フェザー法）

例えば　抵抗 R，インダクタンス L の直列回路を定電圧源 $V_a \cos\omega t$ で駆動した場合の電流　i

は，微分方程式　$Ri + L\dfrac{di}{dt} = V_a \cos\omega t$　から求められるが

$\cos\omega t = \mathrm{Re}\{e^{j\omega t}\}$,　　$\cos(\omega t + \theta) = \mathrm{Re}\{e^{j(\omega t+\theta)}\}$　，（電流と区別するために虚数単位は j）の変換により，　代数方程式　$RI_x + j\omega LI_x = V_a$ となり直流の扱いが導入できる．

2)　流体力学[10]

複素関数による等角写像を利用して，複雑な図形を簡単な図形に変換，物理的性質の解析を行う．

例えば，ジューコフスキの翼断面，カレマン・トレフツの翼断面

3)　定積分の計算[11]

コーシーの積分定理，ローラン展開を経て留数定理．

関数 $f(z)$ が閉曲線 C の内部で，有限個の特異点 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ を除いて正則とする．このとき

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\,s(z_k)$$

を利用して，実変数の定積分を求める．

例えば　$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=2\pi i\cdot\frac{1}{4i}=\frac{\pi}{2}$

4)　量子力学[12]

ミクロの世界の基本方程式とも言えるシュレーディンガーの方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi\ ,\qquad (h:\text{プランク定数},\ \hbar=\frac{h}{2\pi},\ H:\text{ハミルトニアン})$$

を解いて求められるψは波動関数とよばれ，複素数で表される．

そして，$\left|\psi\right|^2$は「その場所に粒子が見いだされる確率を表している．」と考えられている．

5　おわりに

本論文は，長年にわたり中学教育に携わってきた渡辺が発起人となり，同じく長年高校教育に携わってきた武沢と大学の工学部で教職課程を教えてきた佐藤が，協同して「大学で教える教職課程の数学のあり方」を研究してきた内容を論文としてまとめたものである．研究会をはじめてから，かれこれ4，5年になるが，その間，佐藤の教育現場に渡辺と武沢が足を運び，実験的な教育も行い，議論してきた内容を確認することも行ってきた．これらの成果ともいえる内容を断片的に早稲田大学数学教育学会誌に論説として掲載し，先輩諸兄からのご批判／ご意見／ご指導を得てきたつもりである．

この研究会の発端は，「はじめに」にも書いてあるように，教職課程の数学を大学で学んできても，中学／高校の現場では，内容の飛躍がありすぎて，直接的には役に立たず，ギャップが多い，という問題をなんとか解決したい，ということにあった．F.クラインの時代と彼の提出した問題提起とは内容が異なる点もあるが，依然として，ギャップがあるということは大きな問題であり，しかもそれが現在でも依然として本質的に残されているように思われる．これは，別の意味で，F.クラインの時代よりも深刻な問題となっているように思える．このような危惧は，渡辺と武沢その他大勢の現場の教員からの経験でもある．一方，佐藤も実際に教職の数学を教えながら苦慮／苦悶してきたことでもある．この研究は，大学で学んだ内容を中学／高校の現場に役立てるためには，「大学でどのように教えたら良いか」に対する回答を探求することにあった．

世の中は少子化を迎え，受験戦争も緩和されつつあるが，それなりに教育の現場では受験に対する影響が残り，一方では，目的意識を失った生徒に対して，如何に学習意欲をもたせるかが重要になってきていると思われる．こうした環境の変化に対しても，従来通りの，大学での教職課程のあり方では，大変なロスが生じ，また，現場では通用しない知識の伝授では，現場の教育にも役に立たないという，批判を免れない．

本論文では，このような背景のもとに，現状の分析を行い，必要と思われるカリキュラムを構築し，その教授法を模索した．ここに提案した内容は，実験も少なく，その成果の検証にはいくつかの段階を踏む必要があるという点で早計であると思われるが，引き続き研究し，議論すべき課題であるので，これまでの成果を公にすることを考えた．本論文は大学での教職のあり方に対する一つのたたき台であり，これを契機に多数の有識者，経験者からのご意見とご議論をいただきたいと願っている．

最後になるが, 本研究を推進するにあたってご支援･ご教示をいただいた多くの方々に心から御礼を申し上げる. 特に, 早稲田大学数学教育学会の山下元会長をはじめとする教職の数学に興味をお持ちの有志の先生方には貴重な助言やアドバイスを頂戴している. ここに深く感謝する次第である.

[参考文献]

[1]　佐藤, 武沢, 渡辺,『教職課程　解析』の目指すもの, 早稲田大学数学教育学会誌, Vol.21 No.1,　2003.12.

[2]　佐藤, 武沢, 渡辺,『教職課程　解析』をどうすすめるか, 早稲田大学数学教育学会誌, Vol.22 No.1,　2004.12.

[3]　佐藤, 武沢, 渡辺,『教職課程　解析』へのアプローチ, 早稲田大学数学教育学会誌, Vol.23 No.1, 2005.12.

[4]　Wikipedia http://ja.wikipedia.org

[5]　検定教科書 「数学 B」, 東京書籍.

[6]　検定教科書 「数学 C」, 東京書籍.

[7]　高木貞治,「解析概論(改訂第三版)」, 岩波書店, 1990.3.

[8]　林　平馬ほか,「微分積分学序論」, 学術出版社, 2002.11.

[9]　阿部　實,「電気数学　ベクトルと複素数」, 共立出版, 2006.7.

[10]　鬼頭史城,「等角写像とその応用」, オーム社, 1955.11.

[11]　堤　正義,「物理と複素数」, 共立出版, 1993.3.

[12]　山本明利, 左巻健男,「新しい高校物理の教科書」, 講談社, 2006.2.