

三角関数のグラフを含む「角の大きさに関するカリキュラム」

- 1 はじめに
- 2 コンピュータを利用した中学校での関数指導
 - 2.1 授業内容
 - 2.2 生徒の反応とその分析
 - 2.3 その他（2，3年の授業）
 - 2.4 結論
- 3 「角の大きさ」に関する小中高一貫カリキュラム
 - 3.1 「角の大きさ」に関する現在の教科書の記述
 - 3.2 現行の教科書（指導要領）の問題点と考察
 - 3.3 一貫カリキュラムの概要
- 4 中学校での三角関数のグラフ
 - 4.1 注意点
 - 4.2 授業の内容とねらい
 - 4.3 授業の進め方
- 5 音についての総合的な学習
 - 5.1 ねらい
 - 5.2 「学習」の内容と進め方
- 6 おわりに

* 論 文 *

「三角関数のグラフ」を中学校の学習内容に含めた「角の大きさに関する小中高一貫カリキュラム」の研究

渡辺 暁生

1 はじめに

すべての公立小中高等学校等に「コンピュータ教室」が設置される状況（文部省「ミレニアムプロジェクト『教育の情報化』より）は授業を進める上での「画期的な変化」をもたらし、「数学の学習指導要領」にも大きな影響が表れることが期待される。

「画期的な変化」のひとつとして「いろいろな関数のグラフを簡単に書くことが可能になった」ということがあげられる。これにより「いろいろな関数（例えば三角関数）のグラフ」を自由に授業に取り入れることができるようになり、当然「カリキュラム・学習指導要領の見直し」も必要となってくる。このような方向を「今、できる範囲」で現在の中学校で実践し、それを検討し発展させたのがこの論文である。

本稿の土台となっているのは、私が平成8年から11年にかけて目黒区の公立中学校で行った数学の授業（2 コンピュータを利用した中学校での関数の指導）で、そこから得られた結論は

関数の指導にはコンピュータで書いたグラフを活用するのが有効である。

いろいろな関数のグラフを中学校の段階であつかうことが可能になる。

特に、身近な現象を表す関数としての三角関数に「ふれる」こともできる。

であり（2.4 結論）、これに関する授業の分析から論を進める。

つぎに、この「三角関数」と関係が深い「角の大きさ」について、小中高の教科書を調査したが、「形としての角」「回転量としての角」そして「一般角のあつかい」「弧度法の導入」などについて、それらに関するカリキュラムに目を向けたとき、「教材自身をどう展開させるか」そして「とくに幾何学については、学校ではつねに生き生きとした具体的な直感に結びつかなければいけない。その上で漸次に論理的要素を持ち込むことができる」（[2]）という観点などからの方向づけを明確にしていく必要性が感じられ、「角の大きさについてのカリキュラム」（現在、広がりつつある小中高一貫教育にみあった）へと研究を発展させた。

その内容（３「角の大きさ」に関する小中高一貫カリキュラム）は小学校における「辺の開きぐあいを角の大きさといいます」（４年教科書）、「回転の大きさとして角の大きさをとらえる」（学習指導要領）からスタートし、高校における「角の大きさを単位円における弧の長さで表すこと（表現の異なる教科書もある）」（数 教科書）に至るカリキュラムの検討であるが、特にその中で現行の学習指導要領における中学校での「角の大きさ」に関する空白を埋める、という観点からも「三角関数のグラフ」（４ 中学校での三角関数のグラフ）に注目したい。これは本論文の主要なテーマである。そして、この「三角関数のグラフ」が「音」など身近な現象と密接な関係があることを実感し、学習の動機づけとしていく一つの方法として、「総合的な学習」の指導案（５ 音についての総合的な学習）を作成した。

なおこの研究は「一貫カリキュラムとしてのテーマ別カリキュラム」（１９９５．４～１９９７．３ 早稲田大学数学教育学会課題研究：武沢他[3]）、「中学校、高等学校におけるカリキュラムの改善」（１９９７．４～１９９９．３ 早稲田大学数学教育学会課題研究：武沢他[4]）を継続、発展させたものである。

（文中の[]で囲った数字は、文末に記した参考文献の番号）

２ コンピュータを利用した中学校での関数指導

平成１１年度に第１学年（９４名）で実施した授業を中心に、コンピュータを利用した関数指導を分析し「関数指導の新しい道すじ」および「中学校での三角関数のグラフの学習の可能性」について述べる。

２．１ 授業内容

１０月～１２月

数直線（１つの数と点との対応）、座標（２つの数と点との対応）

代入計算、「表」の作成

・（例） $y = \frac{12}{x}$ について

x	- 12	- 6	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4	6	12
y	- 1	- 2	- 3	- 4	- 6	- 12		12	6	4	3	2	1

「表」の x , y の数の組を、座標平面上の「点」で表す。

・注意 『「点」をとるだけで、結ばないこと』

・（問題）

(1) $y = \frac{12}{x}$ (2) $y = 0.5x$ (3) $y = 0.1x^2$

「点」を増やす。

「すべての点を取る」かわりに「なめらかに結ぶ」ことの説明。

関数の定義，関数のグラフの説明。

・(1)は分数関数，双曲線 (2)は1次関数，直線 (3)は2次関数，放物線 である。

(4) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 8$ のグラフ

ここまでは，コンピュータを使用しないで授業を進める。

各自コンピュータを使ってグラフをかき，プリントする。(2時間)

・『コンピュータが表をつくって点を取る作業を「高速で」やってくれる』と説明

・「ソフト」は関数のグラフを描く印刷機能付きの自作の「なべソフト」

・プリントする関数は (1)～(4) さらに

(5) $y = \frac{6}{x}$, $y = -\frac{6}{x}$, (6) $y = -\frac{12}{x}$

(7) $y = -0.5x$, (8) $y = 2x$, $y = -2x$

(9) $y = 0.5x$, $y = 0.5x + 5$, $y = 0.5x - 8$

(10) $y = 0.02x^3 - 0.1x^2 - 2x + 5$

プリントした(1)～(4)および(10)のグラフについて，「手書きのグラフ」と比較しつつ

「コンピュータの働き」「関数のグラフ」「いろいろな関数」の説明。

プリントした(5)～(9)のグラフを使い，関数としての「比例」「反比例」の学習。

「いろいろな関数」のグラフをコンピュータを使ってかき，プリントする。(1時間)

・プリントする関数は

(1) $y = -0.018x^3 - 0.09x^2 - 1.1x - 5$

(2) $y = 0.4x^2 + 3x + 6$ (3) $y = 0.6x - 5$

(4) $y = -0.6x$ (5) $y = \frac{30}{x}$

(6) $y = \sin x$ (7) $y = 5\sin x$ (8) $y = 5\sin 0.5x$

(9) $y = 5\sin 1.2x + 3\sin (-0.9x)$

三角関数も含め「いろいろな関数」の説明

アンケート(2.2 生徒の反応とその分析)

3月

三角関数のグラフと角

「角」について小学校からの復習

・「直角」「開きぐあい」「回転」「540°はどんな角」...

三角関数のグラフをコンピュータを使ってかく．

・プリントする関数

$$(1) y = \sin x \quad (2) y = \cos x \quad (3) y = 10\sin x$$

$$(4) y = \sin 10x \quad (5) y = \sin 0.5x$$

$$(6) y = 3\sin 0.9x + 5\cos 1.1x$$

理科の教科書を参考にして、音と三角関数のグラフとの関係を調べる．

「手書きで」 $y = \sin x$ のグラフを書く．

2.2 生徒の反応とその分析

いろいろな関数をパソコンを利用して描いたことに関して、次のような「アンケート」を実施した．

(1)「いろいろな関数があることが」(よく解った・だいたい解った・よく解らない・まったく解らない)

結果は(90名中)

よく解った ... 55名 だいたい解った ... 35名 よく解らない ... 0名

まったく解らない ... 0名

(2) 次のバージョンアップに向けての希望など

結果(面白いアイデアが多くあったが、ここでは省略する.)

(3) 全体的な感想、希望など(「あったら書きなさい」ということで、何人かが答えた)

この結果は「コンピュータを利用した関数指導をカリキュラムに組み込むこと」に関しての重要な資料になると思うので、原文のまま全部のせる。(意味が分かりにくい箇所には「」印をつけて「注」を書き添えた．また文頭の「・」は一人の生徒を表し、後で引用する場合は文末に「A,B,C, ...」付記した.)

- ・家にもパソコンはあるけど、数学とかでは使わないからとても楽しかったです．
- ・コンピューターを使って、いろいろな関数があることがわかってよかった．これからはコンピューターを使った授業がやりたいです．
- ・楽しかった．「どんなグラフになるかな？」って考えるのも楽しかったし、説明が解りやすくてよかった(A)
- ・とても面白かった．ただ三角関数をどのようにしたらどうなるかを、中学校でくわしく教えてほしい(B)
- ・ふつうの授業だけでは分からない関数がコンピューター(なべソフト)を使ったことでだいたい分かったので良かったです．
- ・初めてじゃなかったから、別に変じゃなかった．
- ・パソコンルームでいろいろな関数を書いたりしたのは、とても楽しかった．また何かやりたいです．
- ・ガッチャマンの音は、良かったと思う．
(「終了」のときに、アニメの「ガッチャマンの音楽」が流れるようにした.)
- ・手書きより正確だからみやすいし、自分で印刷してみると、すごく面白かった．それに直線や曲線などいろいろな線があって関数の勉強がよく解った．時間がなくて自分で数字をきめて表をかくてみるのができなかったのが少し残念でした．(C)
- ・そうさのしかたが簡単で良かった．もう少しコンピューターを使ってやりたかった．
- ・「なべソフト」を使って、とても面白かったです．A, B, C, Dの所に自分の誕生日なんかを入れて、ユニークなグラフができてうれしかったです．また、もっとスラスラとできるようにしたいです．
(「係数などの値」をきめると、そのグラフが描かれるソフトである)
- ・面白かった．

- ・パソコンの授業はとても面白いし、わかりやすくていいと思います。関数もだいたい分かりました。またやって下さい。
- ・グラフがいろいろあることがわかった。
- ・数学の授業でパソコンを使うと思わなかったの、すごくびっくり（うれしかったです）。初めは、ちゃんと操作できるか心配だったけど、やっているうちに慣れて、すごく面白かったです。とてもおもしろいメロディー（ガッチャマン）などが使われていて、いままで1番楽しい授業になったと思います（D）
- ・コンピュータを使ったりするのはおもしろいので、これからも使ってほしい。
- ・最初の方は、分からないことがあったけれど、けっこう面白かったです。関数のグラフだけでなく、ちがうこともできたらうれしいです。
- ・面白く関数の授業がうけられてよかった。これからもたまには使いたいと思う。
- ・コンピュータでグラフが書いておもしろかった。グラフが出てくる時、いろんな形になったりしてとても楽しかった（E）
- ・なべソフトを使ってみて、いろいろな関数がわかったし、パソコンの使い方もわかってよかった（F）
- ・なべソフトはいろいろな関数を書いて、とても面白かったし、こんな関数があったんだ、とか色々わかりました。
- ・パソコンを使うことは少ないし、関数のことが解った部分も多いからなべソフトはいいと思いました。それに楽しいです。
- ・楽しかった。またやりたい。
- ・いろいろなグラフが出てきて面白かった。自分でつくったグラフがとくに変だったから、どうしてこのようなグラフができるか不思議だった。（G）
- ・最初はぜんぜんわからなかった。けど、だんだん解るようになってきて「なべソフト」が楽しくなってきた。
- ・コンピュータで関数のグラフを書きましたが、わかりやすく、たのしかったです。またやるのだったら、今度はもっと難しいグラフが見てみたいと思いました。
- ・私が今までの中で、一番おもしろいと思うグラフは、 $y = 5 \times \sin 1.2 x + 3 \times \cos (-0.9) x$ です（H）
- ・コンピュータが書く線がとてもよかった（I）
- ・いろいろな図が、どういう式でできているかということがわかってよかったと思う。これからも、分かりやすいので増やしていった方がいいと思う。
- ・楽しく勉強ができてとてもよかったと思う。
- ・いろいろな関数のグラフが分かりやすく学習できたし、とてもたのしかったです。
- ・とても面白いが、作業や作業をする準備が大変だった（J）
- ・パソコンを使って授業をやる方が分かりやすくて良かったです。今のままで使いやすいです。
- ・なべソフトの授業は簡単でおもしろかった。
- ・関数とグラフについて分かりやすくなった。
- ・けっこうわかったのでもたやりたいです。
- ・ふつうの授業に、たまに なべソフトの授業が入ると分かりやすいし、とても楽しい。もっと増やしてほしい。
- ・入力がまちがったりしたときの“チラリー”っていう音をもう少し小さくしてほしい。手で書くより、コンピューターの方が、分かりやすく、きちんとしていた。
- ・数学で、パソコンを使えと思わなかったの、初めのうちは、あまりなれなかったけど、とても面白かった。パソコンを使ったことで、数学が苦手な人も、楽しく、分かりやすくてきたと思う。
- ・みんな、本当に楽しんでた。良かった（K）
- ・将来パソコンを使ってもだいじょうぶのようにパソコンができてとても楽しかった。
- ・なべソフトはすごくおもしろいので、もっと授業でやってほしいです。
- ・3時間パソコンをやっても楽しかったです。もう少しパソコンをやってみたかった。
- ・グラフが「ニョロニョロ」とできるのが、非常におもしろかった（L）
（画面上に点が現れる速度を遅くしたので、このように見える）
- ・「。」と「」との違いがわかりづらい。
- ・なべソフトをつかって関数を描くと自分でこまかい計算をしなくていいから、とても楽しかった。
- ・コンピューターを使って勉強したらとても楽しく取り組みました。コンピューターを使ってもっとおもしろいグラフを書きたいと思いました。
- ・数学でパソコンを使うなんて、思ってもいませんでした。でもグラフをかくてコピーするのがおもしろかったです。もっともっといろんなことをしたいです。
- ・とてもおもしろかった。またやりたい。
- ・ガッチャマンの音楽がたのしかった。
- ・たまにだけコンピューターをつかってグラフなどをかくて、けっこうたのしかった。
- ・とてもおもしろかった。
- ・多くの関数があることがよくわかった。コンピュータでグラフをつくるので「手間もかからない」し「スピーディーにすすむ」うえ「楽しい」のでとてもいいと思う。まだ習っていない関数でも、数字を入れるだけでグラフがつくれるので、もっとやりたいって気になる。（M）
- ・よく解り、おもしろくてとてもよかった。今度はもっと音楽をつけてほしい。
- ・なべソフトは、楽しいし、解りやすいから楽しくできた。
- ・コンピューターで関数の授業ができてとてもおもしろかったです。できれば、他の授業でも使いたいです。
- ・いろいろな関数があることが分かった。
- ・いつも分かりやすい説明で、いいと思います。なべソフトも、ぐらふがみやすいし、使いやすいと思います。
- ・なべソフトがあったから、数学が楽しくなったと思います。
- ・最後の曲が流れるところなんか、ユーモアがあっていいと思う。
- ・もっとやりたい。
- ・やりやすかった。
- ・ガッチャマン最高！

- ふつうの授業も楽しい！ けどパソコンは2倍たのしい！
- ・なべソフトはおもしろいです。おわりの曲は先生の声が入ったガッチャマンがいいです。
(やっぱり無理でしょうか?)
三角関数おもしろかったです。(N)
 - ・パソコンを使った方が楽しいし、関数のこともグラフをつくったおかげでよく分かるようになったので、パソコンをもっと授業中に使って勉強したいと思います。
 - ・もうちょっとコンピュータをやりたいかった。(3学期はたくさんできるようにして下さい)でも機能の方はこれでOKだと思う。キーボードもたくさん打ちたいし終了音楽がおもしろい(時々聞こえないときもあった)。グラフはおもしろいグラフも発見できたしよかった。
 - ・ガッチャマン最高です。毎回授業の始めに歌って下さい！
(教室の授業の時「歌詞」をプリントして、一回歌って聞かせた)
関数について、とっても²良く分かりました。
「なべっち」登場ってます！
(そのうち「ゲームソフト」をつくる。なまえな「なべっち」と授業の時伝えた)
 - ・せっかくコンピュータをつかっているのだから、勉強の中にちょっとしたゲーム(遊び)があったら、もっとたのしく勉強ができると思います。
 - ・ゲームをつくって下さい。もっといろいろな音楽をつけて下さい。
A > SANKAKU でいろいろなグラフができて楽しかったです。
(「SANKAKU」で三角関数のグラフを描くソフトを起動するようにした)
 - ・ガッチャマンの曲を入れるアイデアがよかった(おもしろかった)
 - ・いろいろな関数があるのがよくわかった。早くなべソフトのゲームがやりたい。

分析

「アンケートの結果」「授業の状況、雰囲気」などから、この「授業」を分析する。

- (1) この授業の主要な目的である「いろいろな関数があることを理解する」ことは、ほぼ達成できたと考えられる。(の(1)集計,(3)F,Mなど アンケートより。以下同じ)
- 「いろいろな関数」の中味も、一般の二次関数、三次関数、さらに三角関数まで広げることができた。
- (2) はじめに、二次関数も含めいくつかの関数のグラフを「手書きで」書かせたが、苦痛に感じたり、めんどろに思った生徒もいたようである。(J)
- しかし、これは「関数のグラフの意味を理解する」「コンピュータが何をやっているかを知る」「コンピュータの正確さ、速さを実感する」ために必要な作業であろう。
- (3) 「面白かった」「楽しかった」という感想が多い。(D,Kなど)
- 普通教室での(コンピュータを使用しない)数学の授業ではあまりない状況である。
- いろいろな原因はあるのだろうが、授業中の様子を見ていても、コンピュータでグラフを書いている時はほとんど全員がそれに集中し、しかも楽しそうであった。
- 「面白さ」「楽しさ」の内容は、
- A・楽しかった。「どんなグラフになるかな？」って考えるのも楽しかった...
- E・コンピュータでグラフが書けておもしろかった。グラフが出でくる時、いろんな形になったりしてとても楽しかった。
- G・いろいろなグラフが出てきて面白かった。自分でつくったグラフがとくに変だったから、どうしてこのようなグラフができるか不思議だった。
- H・コンピュータで関数のグラフを書きましたが、わかりやすく、たのしかったです。ま

たやるのだったら、今度はもっと難しいグラフが見てみたいと思いました。

I・コンピュータが書く線がとてもよかった。

L・グラフが「ニョロニョロ」とできるのが、非常におもしろかった。

などであり、生徒たちの「グラフを書いたときの感動」「グラフに対する期待感」が伝わってくる。学習意欲とも結びつく、大切にしたいポイントである。

(4) まず視覚的なもの(ここではグラフ)から「関数」に興味を持つ、そしてその状態で式を考えたり、説明を聞いたりする。この学習形態はもっと重視されてもよい。(B)

$y = 5 \times \sin 1.2x + 3 \times \cos(-0.9)x$ のグラフを「書いてみて」興味を示す生徒はいるが(H)、逆にこの式を見て面白いとはおそらく思わないであろう。

(5) 三角関数のグラフが出てきた瞬間に「なんだこれは!」というびっくりした声がよくあがった。直線のグラフを見慣れた感覚からは「予想外のグラフ」といえるのであろう。

初めて出会った「周期的に変化する関数のグラフ」には特別の興味を示す生徒が多かった。理科の教科書にでてくるオシロスコープの図と併せて、学習を深めたいグラフである。

2.3 その他(2, 3年の授業)

平成9年度に2年生を対象に「コンピュータを利用した一次関数の授業」を実施した。

生徒たちはコンピュータの利用は初めての経験であったが、アンケートをとった結果は次のようであった。([5])

(1)「いろいろな関数があることが」よく(だいたい)わかった ... 96.3 %

(2)「一次関数のグラフが直線になりそうなことが」よく(だいたい)わかった... 90.2 %

平成10年度に3年生を対象に「コンピュータを利用した二次関数の授業」を実施した。

新しく赴任した学校だったため、初めて担当する生徒たちであった。

各自がコンピュータを利用してプリントした二次関数のグラフを使って授業を行った。

手書きでは困難な「放物線のグラフ」が使用可能なので、一般形にまでふれることができた。

2.4 結論

従来は、一次関数を除き「関数のグラフを手書きでかくことの困難さ」が授業内容、そしてカリキュラムにも大きな制限を及ぼしていた。しかしこのようにコンピュータを利用することにより「壁」は取り除かれ、下記のような「より豊富な内容の授業」が可能になった。

「始めにグラフをかく」ことにより、それぞれの関数の性質を「視覚的」「直感的」に把握することからスタートできる。

描いたグラフを各自がプリントアウトし、それを教材とし利用する授業ができる。

多くの関数を並行的に取り上げることにより、それぞれの関数の特色を正確に理解できる。

三角関数のグラフも描くことができ、そのグラフに生徒は大きな興味を示す。

「音」「電波」「運動」など身近な現象と結びつけて三角関数のグラフを学ぶこと、あるいは三角関数のグラフを利用してそれらの現象を分析することが可能である。

そして、ここでの「三角関数のグラフ」には、カリキュラム作成上から大きな意味が二つ考えられる。ひとつは、あげたような「周期的に変化する現象」を、例えば「総合的な学習」の時間に結びつけて、理科と数学で、より深く学習していくカリキュラムが考えられる。

このことに関連しては「5 音についての総合的な学習」で具体的に述べる。

もうひとつは「角」についての小中高一貫カリキュラムの中での位置づけで、このことには「3 角の大きさに関する小中高一貫カリキュラム」の中でふれる。そして「関数指導」に、この観点を併せた内容の授業計画を「4.3 授業の進め方」としてまとめた。

3 「角の大きさ」に関する小中高一貫カリキュラム

3.1 「角の大きさ」に関する現在の教科書の記述

小学校

(1) 基本的な用語の説明に続いて「形」としての「直角」を定着させる。

平成14年度使用 東京書籍（新しい算数・数学）より（以下同じ）

小学校2年上

「まっすぐな線を直線といいます」

小学校2年下

「3本の直線でかこまれた形を、三角形といいます」

「4本の直線でかこまれた形を、四角形といいます」

小学校3年上

「三角じょうぎの㊦㊧のような かどの形を直角といいます」(三角定規の図省略)

「4つのかどが、みんな直角になっている四角形を、長方形といいます」

「四角形で、直線のところをへんといい、かどの点を ちょう点といいます」

「三角形でも、直線のところをへんといい、かどの点を ちょう点といいます」

「直角のかどがある三角形を、直角三角形といいます」

(2) 「形」として「角」を説明した後、「角の大きさ」という「量」を「辺の開きぐあい」と定義する。

小学校 4 年上

「1 つのちょう点からでている 2 つの辺がつくる形を、角といいます」

「角をつくっている辺の開きぐあいを、角の大きさといいます」

「角の大きさは、辺の長さにかんけいなく、辺の開きぐあいだけでまります」

角についてはその他の教科書の説明もほぼ同様で（渡辺：「小・中・高における角の大きさと表現」1997 年より）

（A 社）「1 つのちょう点から出ている 2 つの辺がつくる形を、角といいます」「角の大きさは、辺の長さにかんけいなく、辺のひらきぐあいでまります」

（B 社）「1 つの点からでている 2 つの直線でできる形を角といいます」「角の大きさは、辺の長さにかんけいなく、辺のひらきでまります」

（C 社）「1 つのちょう点から出ている 2 つの辺がつくる形を角といいます」「角の大きい小さいは、角をつくる 2 つの辺のひらきぐあいでくらべます」

（D 社）「1 つの点から出ている 2 つの直線がつくる形を角といいます」「角の大きさは、辺の長さにかんけいなく、辺のひらきぐあいでまります」

となっている。

（3）「辺の開きぐあい」を「回転」と結びつけ、その量を「直角」を利用して表示し、「度」という単位を導入する。

小学校 4 年上

（回転の角の大きさ）

『図（略）のように 2 まいのあつ紙を重ね、一方を回転させて、いろいろの角をつくりましよう

「半回転したときの角の大きさは、2 直角です」（図省略）

「1 回転したときの角の大きさは、4 直角です」

『直線が回転すると、いろいろな大きさの角ができるね』

『角の大きさをはかるには、分度器を使います』

「直角を 90 に等分した 1 つ分を 1 度といい、 1° と書きます」

「度は、角の大きさを表す単位です」

「角の大きさのことを、角度ともいいます」

『次の角をかきましよう 72° 、 111° 、 165° 』

「角のはかり方」についてはその他の教科書の説明もほぼ同様の考え方で（渡辺：「小中高における角の大きさと表現」1997年より）

（A社）「おおぎを使って、いろいろな角をつくること」からスタートし、

「1回転の角を直角4つ分」とすることから「1直角 = 90° 」として「1度」を角の大きさを表す単位として定義している。

（B社）「糸を2つにおり、ピンでとめ一方を動かしていろいろな角をつくること」からスタートし、

「1回転は4直角、半回転は2直角」から「1直角 = 90° 」として「1度」を角の大きさを表す単位として定義している。

（C社）「色紙を3枚使って、丸く開くおおぎをつくり、それを開いていろいろな角をつくること」からスタートし、

「直線がどれくらい回ったかで、角の大きさが決まる」と説明し、分度器の図を利用して「直角... 90° 」および「度」を導入している。さらにこれを半回転、一回転させ「1回転は 360° 、半回転は 180° 」と発展させている。

（D社）まず、魚の口の開け方から「角をつくっている辺の開き具合を、角の大きさといいます」とことわり、厚紙でつくった2本の棒を重ねてとめ、それを動かしていろいろな角をつくり、そこから「4直角の角を1回転の角、2直角の角を半回転の角」とし、「角の大きさを表す単位には、度があります。1回転の角を360等分した1つ分の角の大きさを1度といい、 1° と書きます。」としている。

（E社）「あつ紙でつくった2枚の円を重ね、一方の円を回転させていろいろな角をつくること」からスタートし、

「半回転は直角の2つ分で2直角とよぶ」ことをしめしている。

次に、角の大きさを測るのに「分度器」をつかいその目盛りから「1直角 = 90° 」として「1度」を角の大きさを表す単位として導き出している。

となっている。

（4）「量」としての「角の大きさ」

小学校5年下

（「角の大きさ」に関する問題）

「三角形の3つの角の大きさの和は、 180° になります」

「四角形の4つの角の大きさの和は、 360° になります」

『五角形、六角形の角の大きさの和を、それぞれ調べましょう』

小学校6年下

(算数のまとめ 「量と測定」)

「量には、長さ、面積、体積、重さ、時間、角度などがあります。長さ、重さ、時間の単位をかきましょう」

(5) 小学校指導要領(平成10年12月)より

第4学年 2 内容 B 量と測定(2)

角の大きさについて理解し、それを測定することができるようにする。

ア 角の大きさを回転の大きさとしてとらえ、その単位と測定の意味について理解すること

中学校

(6) より厳密に「角」を定義する

中学校1年

「2点A, Bを通る直線のうち、AからBまでの部分を線分ABという。また直線ABといえはふつつ、両方にかぎりなくのびているものとする」(図略)

「図のような角を記号を使って AOB と書く」

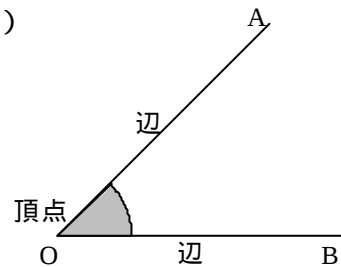
「AOBの辺OAは、線分OAをAのほうへまっすぐに
かぎりなくのばしたものである。これを半直線OAという。

AOBは、1つの点Oから出る2つの半直線によって

できる図形である」

「四角形ABCDで(図略) ABCと ADCの大きさは等しい、このことを

$ABC = ADC$ と書く」



(7) 「角の大きさ」に関する問題

中学校2年

「 n 角形の内角の和は $180^\circ \times (n - 2)$ である」

(8) 中学校指導要領には角の大きさに関する記述はない，

高等学校

(9) 一般角の説明

平成 1 4 年度使用 高等学校検定済み教科書より (以下同じ)

(新編 数学 数研出版株式会社)

図形に現れる角の大きさは， 0° から 360° までであるが，回転運動などをあつかうときには 360° 以上の角や，回転の向きをも考えた角が必要である．そこで角の意味をそのように広げること考えよう．

(1 0) 弧度法の説明は，次のように A ， B 2 つのタイプに大別される．内容的には同じことであるが，タイプ B が「弧の長さで角の大きさを表す」ことを明記してあるのに対し，タイプ A はそれがない．

タイプ A

(新編 数学 数研出版) ほか 1 3

右の図のように，中心 O ，半径 r の円の周上に，半径に等しい長さの弧 AB をとる．

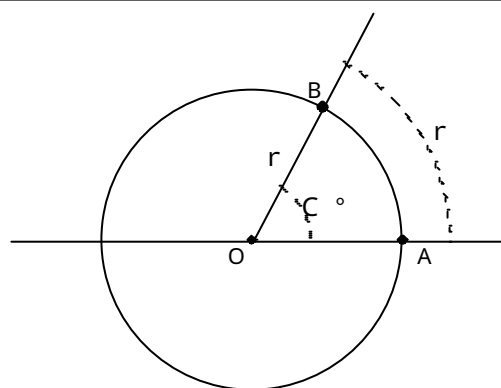
弧 AB に対する中心角 AOB を考えると，

この角の大きさは，半径 r に関係なく，

一定である．そこで この大きさの角を

角を測る単位として用い，これを 1 ラジアン radian

または 1 弧度という．1 ラジアンを単位とする角の表し方を弧度法という．



タイプ B

(改訂版 数学 三省堂) ほか 7

これまでは，1 回転分の角を 360 等分したものを 1 度，すなわち 1° とし，これを単位として角の大きさを表してきた．

これに対して、次のような新しい方法で角の大きさを測ろう。

右図のように、平面上に半径 1 の円 O を考える。

xOP に対するこの円の弧の長さが θ のとき、

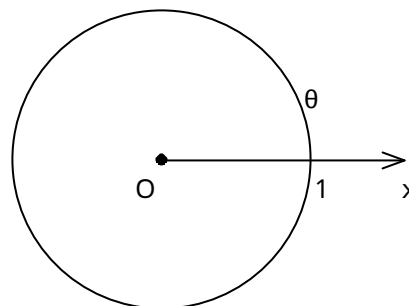
$\times OP$ の大きさを θ ラジアンという。

たとえば、

1 回転した角 360° は 2π ラジアン、

$\frac{1}{2}$ 回転した角 180° は π ラジアン、

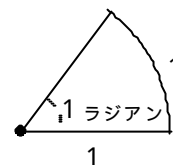
$\frac{1}{6}$ 回転した角 60° は $\frac{\pi}{3}$ ラジアン などとなる。



このような角の測り方を弧度法という。

弧度法では、ふつうラジアンを省略して、単に $2\pi, \pi, \frac{\pi}{3}$

などと表す。



また、1 ラジアンは弧の長さが 1 となるときで、

60° より少し小さい角である。

(1 1) 高等学校指導要領 (平成 1 1 年 3 月 平成 1 5 年度から実施) より

数学 の「解説」に次のような記述がある。

2 内容と内容の取扱い (いろいろな関数) ア 三角関数 (ア) 角の拡張

「数学」では、 0° から 180° までの角について正弦、余弦および正接の意味を理解させそれを図形の計量の考察に活用できるようにしている。

ここでは、角の概念を一般の角まで拡張して、三角関数の概念を導入する。また、従前の「数学」の「(2) 微分法」で扱われていた弧度法を扱い、扇形の面積や周の長さを求めたり三角関数のグラフをかいたりするのに弧度法が有用であることを理解させる。

3 . 2 現行の教科書 (指導要領) の問題点とその考察

前章 (3 . 1) の (1) ~ (1 1) をもとに、いくつかの問題点をあげ考察する。

「角の大きさ」を「辺の開きぐあい (途中の動きは考えずに、開いた結果と受け止めるであろう) 」で定義し (2) , その量は「回転」と結びつけ「直角」を利用して、単位として「度」を導入する (3) .

という考え方は小・中学校では定着している．しかし，このように「角の大きさ」を考えると，例えば 180° と 540° は「同じ開きぐあい」すなわち「同じ角」となってしまう．

仮に， 180° と 540° は「同じ角」であるとすると，「五角形の角の大きさの和は？（４）」 180° でもよいということになる．

「角に関する議論が混乱しがちな理由は，第一に“角とはなにか”について適切な形で定義されることが少ないからであり，第二に，（ ）角そのもの，（ ）角の測度，（ ）角の連続的变化，（ ）それに応ずる角の測度の増加量 などがゴッチャになるからである[10]．」という問題は，小学校の段階から，それなりに明確にしていく必要がある．

実際に授業で「回転」を説明する場合は，何らかの「教具」をつかう場合が多い．その時生徒は「回転運動」を見ているので，当然途中の動きを見ることになる．したがって２回転，３回転あるいは，反対まわりの回転にふれることは，むしろ自然である．

そしてこの場合，「辺の開きぐあい」だけでなく，「辺の上の固定点が円周上を動いた長さ（弧の長さ）」に注目させる必要がある．

小・中におけるこの経験なしに，高校で突然現れる「一般角（９）」「弧度法（１０）」は，生徒たちに，かなりの「とまどい」を与えているのが現状である．

「角が円周から切り取る弧で，角を計量することは，角そのものの概念と同じように古く，すでにバビロニアで知られていた」（[8]）わけであるが，「... そして， $\sin x$ と $\cos x$ との級数展開が，ニュートンによって発見されて，変数のすべての値に対して成り立つ，これらの表示が得られた後，オイラーのもとでついに《虚》数の対数に関して，任意な角の計量に対する正確な概念が現れる」（[8]）とあるように，「角の大きさ」が「一般角」となるのには，長い年月がかかっている．

もちろん，授業では必ずしも「歴史をたどる」必要はないのだが，小学校での「角の大きさ」から高校での「一般角」までのみちすじを教科書ではもっと系統的に示す必要があるのではないだろうか．

「角の計量」に関しては，「角の大きさを測るには分度器を使います（３）」と述べられているが，小学校指導要領（５）の「角の大きさを回転の大きさとしてとらえ，その単位と測定の意味について理解すること」を考えると，なんらかの補足説明が必要であろう．

「回転」が単に「いろいろな大きさ角」の説明の道具だけで終わってしまい，「形としての角」「角の大きさ」の説明になっていない．

３．３ 一貫カリキュラムの概要

小学生全員が将来「弧度法」あるいは「一般角」を学ばなくてはいけない，ということではない．

しかし『直線が回転すると、いろいろな大きさの角ができるね(小学校4年)』という問題に対して、「一回転以上した場合」あるいは「反対に回転させた場合」についての、展望と興味を持たせるような、また弧の長さにも目を向けるような(3.2 現行の教科書(指導要領)の問題点とその考察)カリキュラムにしていきたい。

小学校から円と円周上を移動する点を利用して「角の大きさ」を考え、「回転」をそれぞれの段階でのポイントにする。そして「反対方向の回転」「2回転、3回転」などにも、その状況に応じ柔軟に対応し、展望を持たせる。

中学校で「三角関数のグラフ」を扱い、それを利用して(4 中学校での三角関数)現在の中学校での「角の大きさ」の空白をうめ、ここで「形としての角」と「回転量としての角」を明確にする。また「単位円」を導入し、「一般角の考え方」「弧度法の考え方」にもふれる。(「三角関数一般」の導入にもなるわけであるが、ここでは「グラフ」および「考え方」までとし、「一般角全般」「弧度法全般」「三角関数全般」「三角比」については高等学校段階でカリキュラムをつくる。)

高校での弧度法の説明には「タイプB」をつかい、「弧の長さで角の大きさに表すこと」を強調する。また小学校から継続している「回転」の説明がここに結びついてくるように配慮する。

度数法と弧度法の使い分けの原則

「角の大きさ」は「量」であり、これを計測する単位として「度」と「ラジアン」が使われている。「度」は「直角という形」を土台にしている関係で(3.1(1),(3))、「形」と結びつけて「角の大きさ」を考える場合に使用するのが適当であろう。しかし本来は「量」であるから、「和」を考える場合など必ずしも「形」と結びつける必要はない。

これに対して「ラジアン」は「弧の長さ」で「角の大きさ」を表すので「形」と結びつけてイメージする必要がなく、「量そのもの」を適切に表しやすい。そこで原則としては、

度数法 三角定規の角 90° 、 60° のように「角の大きさ」と同時にその「形」がイメージされる場合。(0° 以上 360° 以下である。)

「形」とは必ずしも結びつかなくとも「角の和」を考える場合(結果的に 360° を越す場合も含まれる。)

弧度法 「回転量」を考える場合。(負の量、2回転、3回転...も含まれる。)

三角関数などで使う場合。

となるが、どちらも「角の大きさ」という「量」を表しているのであるから、お互いの関係は小学校から使われる「円と円周上の点」を利用して、それぞれの段階でふれていく必要がある。

4 中学校での三角関数のグラフ

「三角関数のグラフ」を中学の学習内容に含める理由をまとめると、

コンピュータを利用することにより、いろいろな関数の中のひとつとして簡単に「三角関数のグラフ」を書くことができるようになった。

音、電波など身近な現象と関係の深い関数である。また理科でも学習中である。

周期的に変化するグラフそのものが、生徒にとって新鮮であり、興味をひく形である。

「角の大きさ」を変数とするので、小学校から学習してきた「角の大きさ」を高校での「一般角」「弧度法」に発展させていくためのポイントとなる内容を含んでいる。

(カリキュラム上での位置づけにの説明は(3.3 一貫カリキュラムの概要)を参照)

などであり、積極的な意味を持つ。そこで以下(4.1 注意点)であげるいくつかの点を考慮しつつ、平成11年度の「コンピュータを利用した中学校での関数指導」(2.1 授業内容)を土台にして「三角関数のグラフの説明および角の大きさ」に関する部分の具体的な指導案(4.3 授業の進め方)を提示する。

4.1 注意点

単位円上を動く点に関する関数(「円関数」)としてそのグラフを中心に取り上げる。(三角比 → 三角関数という流れではない)

平方根の計算との関係、理科の授業との関係などから、中学校3年で扱う。

「sin」「cos」の記号は「ブラックボックスの中味」と考える。

三角関数は「グラフを描くこと」ととどめる。(三角関数一般は高校の内容)

変数 x は点が単位円周上を移動した長さをを使う。

単位円周上の点の回転は2回転、3回転... も考え、さらに逆回転にもふれる。

4.2 授業の内容とねらい

この授業に入る前の関数の授業で、生徒たちは「いろいろな関数のグラフ」としていくつかの「三角関数のグラフ」をコンピュータを使って書いていることを前提に、グラフの形に対する興味(例えば周期性)などを「手書きのグラフ」により解明する。

単位円を使い「 $y = \sin x$ のグラフの意味」を考えさせる。

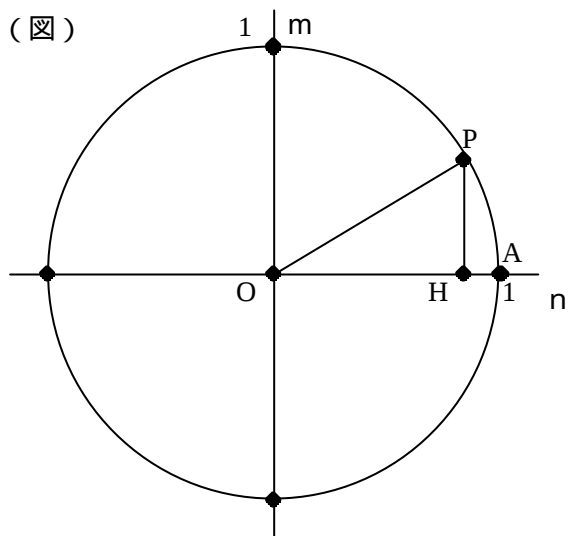
x は単位円周上を点が移動した長さをを使い、 2π 以上の必要性、負の長さの必要性にもふれ、「一般角」への展望とする。また弧の長さを中心角を対応させ、小学校から学習してきている「角の大きさは辺の開きぐあい」と結びつけて「弧度法」への準備をする。

高校での「三角比」「三角関数」の授業への準備。

4.3 授業の進め方

下図のような半径 1 の円周上を点 P が点 A から時計と反対回りに移動していく。

(図)



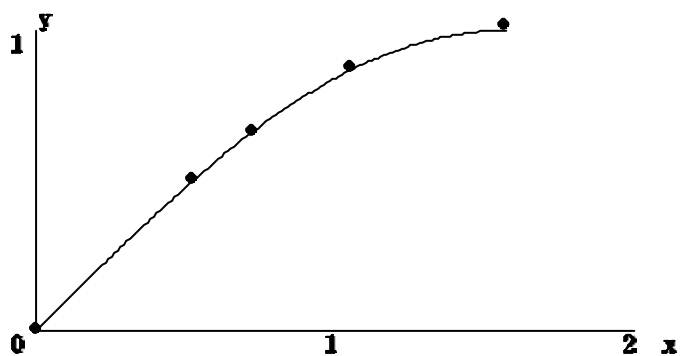
中心 O で直角に交わる 2 本の
円の対称軸 直線 m, n をひく。
また図で, PH = OA とする。

表の作成 (計算)

1	POA	0°	30°	45°	60°	90°
2	点 P が円周上を動いた長さ x (弧 AP の長さ)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
3	計算 x	0	0.52	0.79	1.05	1.57
4	PH の長さ y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
5	計算 y	0	0.5	0.71	0.87	1

2, 3, 4, 5 は 生徒に値を入れさせる

の図をつかって「この場合 y は x の関数である」ことを示し, 表から点を取り, 手書きで
グラフをかく。

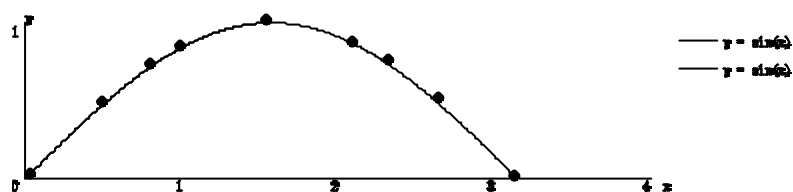


$$y = \sin(x)$$

円が直線mに関して対称であることを利用し $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ に のグラフを拡張する .

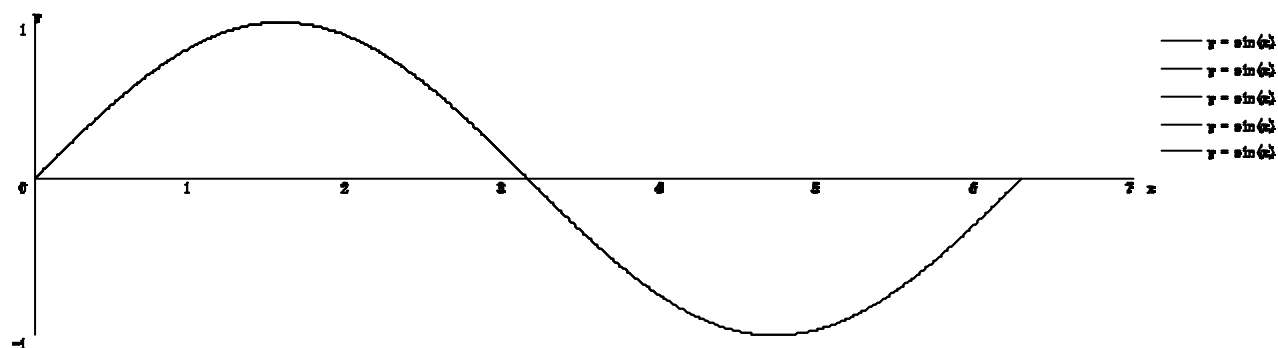
表の作成

1	POA	90 °	120 °	135 °	150 °	180 °
2	点 P が円周上を動いた長さ x (弧 AP の長さ)	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
3	計算 x	1.57	2.09	2.36	2.62	3.14
4	PH の長さ y 対称を利用して					
5	計算 y	1	0.87	0.71	0.5	0



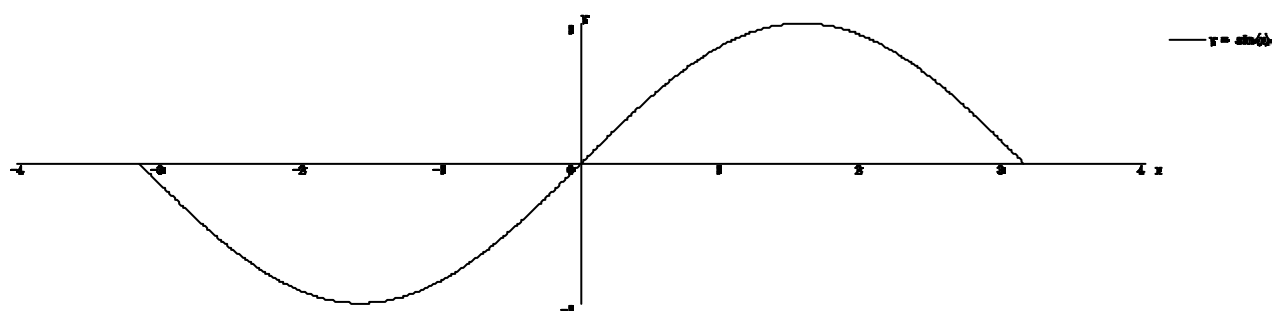
円が直線nに関して対称であること , を利用し $0 \leq x \leq 2\pi$ に のグラフを拡張する .

なお点Pが直線nに関して図の場合と反対側にある場合 y は負の数と考える (以下同様) .

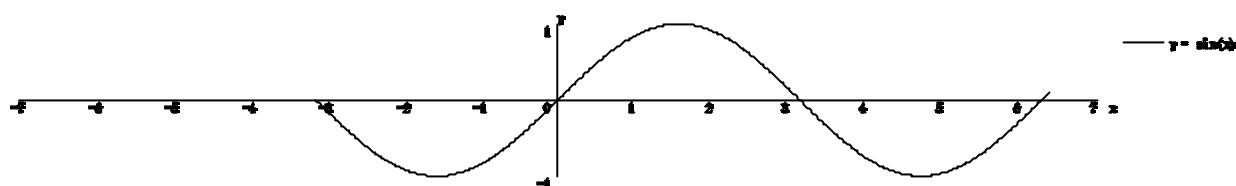


円が直線nに関して対称であることを利用し $-\pi \leq x \leq 0$ に のグラフを拡張する .

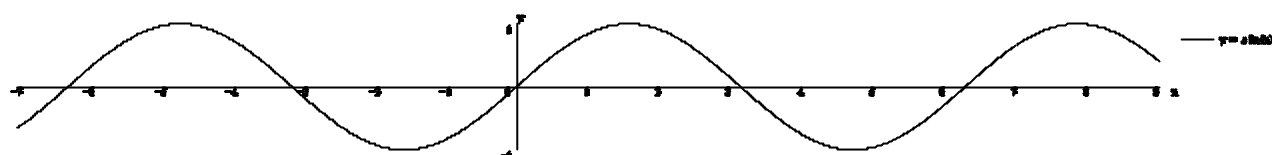
なお点Pが時計回りをする場合 x は負の数と考える (以下同様)



以上を総合して $-\pi \leq x \leq 2\pi$ のグラフを描く



コンピュータを利用して $y = \sin x$ のグラフを描く



手書きのグラフ とコンピュータで描いた のグラフを比較して

(1) 点 P を円周上を何回転かさせることにより, のグラフは のグラフと一致する .

(2) の式の $\sin x$ は の図の PH の長さを表す .

ことを予想させる .

このグラフが周期的に変化することを の図を利用して確かめる .

「手書きのグラフ」のための「表」を参考に,「回転した角の量」を説明した後,次の「表」の空欄をうめさせる .

(1)

2	点 P が円周上を動いた長さ x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
4	PH の長さ y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
1	POA	0°	30°	45°	60°	90°
	回転した角の量	0°				90°

(2)

2	点 P が円周上を動いた長さ x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
4	PH の長さ y	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
1	POA	90°	120°	135°	150°	180°
	回転した角の量	90°				

(3)

2	点 P が円周上を動いた長さ x	π				$\frac{3\pi}{2}$
4	PH の長さ y	0				- 1
1	POA	180 °	210 °	225 °	240 °	270 °
	回転した角の量	180 °				

(4)

2	点 P が円周上を動いた長さ x	$\frac{3\pi}{2}$				2π
4	PH の長さ y	- 1				0
1	POA	270 °	300 °	315 °	330 °	360 °
	回転した角の量	270 °				

(5)

2	点 P が円周上を動いた長さ x	2π	$2\pi + \frac{\pi}{6}$	$2\pi + \frac{\pi}{4}$	$2\pi + \frac{\pi}{3}$	$2\pi + \frac{\pi}{2}$
4	PH の長さ y	0				1
1	POA					90 °
	回転した角の量					450 °

(6)

2	点 P が円周上を動いた長さ x	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
4	PH の長さ y	0				- 1
1	POA	0 °	30 °	45 °	60 °	90 °
	回転した角の量	0 °	- 30 °			

POA と回転した角の量を比較し、「形としての角」と「回転量としての角」について学習する。
 (5)(6) から「一般角の考え方」を導入する。(展望を示す程度)
 P が円周上を動いた長さ と回転した角の量を比較し、「P が円周上を動いた長さで回転した角の大きさ(量)を表すこと」について考える。(弧度法の学習への準備)
 「ここで円を利用して描いたグラフ」「コンピュータを利用して描いた $y = \sin x$ のグラフ」を使って、「三角関数」「三角比」との関係にもふれ、将来の学習への動機づけをする。

5 音についての総合的な学習

5.1 ねらい

いろいろな関数のうちで、特に三角関数のグラフは身近な現象と関連が深い。その一つとして「音」との関係を学習する。

三角関数のグラフは周期的に変化する「波形」のグラフであり、「周期的な変化」と関係のあるものは音以外にも「電流」など、身の回りに多くあることに、目を向けさせる。

三角関数はこれらのことを研究するのに役立っていること理解する。

5.2 「学習」の内容と進め方

数学担当，理科担当の2人共同で2回，それぞれが1回行う。

対象は中学3年とし，時期は数学で三角関数のグラフをあつかった直後，あるいは同じ時期を想定する。

各時間の内容(計画)

(1回目)

- ・コンピュータを利用して，いろいろな音の波形を見る。
- ・プリントする。(高い音，低い音，大きい音，小さい音，自分の声，音叉の音)
- ・使用ソフト(オシロスコープの働きをする適当なもの)

ここでは、「振駆郎 ver 1.3」，たまきちの物理 (<http://www.bekkoame.ne.jp/~kitamura/>) よりダウンロード

- ・理科担当が主に進める。(数学担当は活動の補助と「進行状況」の把握)

(2回目)

- ・コンピュータを利用して，三角関数のグラフを描き，プリントする。
- ・プリントする関数は

$$1. y = \sin x \quad 2. y = 6 \sin x \quad 3. y = 6 \sin 3x \quad 4. y = 6 \sin 0.4 x \quad 5. y = \cos x$$

$$2. y = 2 \sin 1.7 x + 3 \cos 1.2 x$$

- ・使用ソフト(関数のグラフを描く適当なもの)

ここでは、「なべソフト」(自作)

- ・ 数学担当が主に進める。(理科担当は活動の補助と「進行状況」の把握)

(3回目)それぞれの教科でやる,これは数学科の内容(理科の内容は省略).

- ・ 音叉の音の波形と三角関数のグラフを比較する.
- ・ 1回目と2回目で描いたグラフを比較し,「どんな音が」「どんな式」になるかを調べる.
- ・ 自分の声の波形と三角関数のグラフとを比較する.
- ・ 「音を関数を利用して研究すること」を考える.
- ・ 「音」以外にも,身の回りに周期的に変化するものがないかを調べる.

6 おわりに

数学の授業におけるコンピュータ利用によって,この研究の土台となった「いろいろな関数のグラフを簡単に書くことが可能になった」ことに加え,「立体図形も含め様々な図形を容易に表示することができる」「確率・統計におけるシミュレーションを簡単に実行できる」など,カリキュラムの根本に影響することが数多く考えられる.

カリキュラムの研究は,このようなこととも関連させ発展させていく必要がある.

ここに「昭和25年3月」と書かれた古ぼけた私の中学校の卒業アルバムがある.その中に数学の授業風景があり,「三角函数」と書かれた黒板の文字がかすかに読みとられる.

戦後間もない混乱の時代,新制中学校の教師と一期生たちは芋をかじりながら生きていた.

カリキュラムどころではなかっただろう.けれど,うれしそうに「自分のやりたいように数学を教えていた」先生の顔,受験とは関係なしに「数学を楽しんでいた」授業の雰囲気は忘れられない.

50年の年月が経ち,教育環境は「整備」された.しかし,それとともに「失われていくもの」もあったのではないだろうか.

このような「論文を書く意欲の源」を,また「数学への夢」を与えてくれた中学時代の恩師河村喬雄先生に深く感謝します.

また「角の大きさ」という問題の多いテーマに関して,いろいろな角度からご指導いただいた,早稲田大学小島順教授に深く感謝いたします.

そして,いっしょに学校生活をおくった生徒たち... 「ありがとう」

本研究は早稲田大学数学教育学会課題研究費の助成を受けたものである.

参考文献

- [1] 文部省:「ミレニアム・プロジェクト」により転機を迎えた「学校教育の情報化」,2000
- [2] F.クライン:高い立場からみた初等数学,遠山 啓監訳,東京図書,1959

- [3] 早稲田大学数学教育学会誌，第 15 巻，1997
- [4] 早稲田大学数学教育学会誌，第 17 巻，1999
- [5] 渡辺：生徒一人一人が作る数学の資料とその活用，数学教室（明治図書）1999 年 11 月
- [6] 平成 14 年度使用 小学校・中学校・高等学校 検定済み教科書，文部省
- [7] 小学校・中学校・高等学校 学習指導要領 （平成 11 年），文部省
- [8] ブルバキ：数学史，村田 全，清水達夫訳，東京図書，1970
- [9] G．ショケー：初等幾何学，秋月康夫，公田 蔵訳，岩波書店，1971
- [10] 小島 順：線形代数，日本放送出版協会，1976
- [11] 北村俊樹：音声と運動の実験室，森北出版，1996